



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Master di II livello in
“OPTICS AND QUANTUM INFORMATION”

RADAR QUANTISTICO

Relatore

Prof. Fabio Antonio Bovino

Candidato

Ing. Salvatore De Mattia

Anno accademico 2019/2020

Indice

Introduzione	4
Fondamenti di meccanica quantistica	6
Campo elettromagnetico quantizzato	6
Stati coerente	12
Stati squeezed	15
Distribuzioni di probabilità dello stato coerente e squeezed	19
Sfera di Bloch e matrice densità	20
Particella immersa in un campo magnetico	26
Sistema a due livelli – approssimazione semiclassica	27
Sistema a due livelli – campo elettromagnetico quantizzato	29
Stati e operatori quantistici	32
Entanglement e porte logiche quantistiche	35
Stati entangled	35
Porte logiche reversibili	44
Quantum Illumination	53
Teoria dell'illuminazione quantistica	53
Quantum Radar	69
Sperimentazioni nell'ambito dell'illuminazione quantistica e del radar quantistico	73
Considerazioni e comparazioni sull'approccio classico e quantistico	84
Sezione ricevente	88
Strategie di rilevamento	88

Criterio di Neyman-Pearson	88
Rilevamento omodino	89
Rilevamento eterodino	89
Conteggio di fotoni	89
Principali limitazioni di un radar quantistico	97
Rilevatori a singolo fotone	98
 Applicabilità di un radar quantistico	 104
Nozioni principali del radar classico	104
Architettura del radar quantistico	106
Aspetti connessi alla Guerra Elettronica	108
Calcolo delle matrici di covarianza	113
Significato della matrici di covarianza nelle misurazioni	122
Foglio di calcolo radar quantistico	123
 Conclusioni	 129
 Riferimenti	 133

Introduzione

Le nascenti tecnologie che sfruttano fenomeni quantistici sono in costante crescita ed evoluzione, dimostrando che in alcuni ambiti queste condurranno a vere e proprie rivoluzioni tecniche piuttosto che mere evoluzioni di quanto ottenuto tramite i fenomeni cosiddetti classici.

In ambito militare, l'analisi, lo studio, l'implementazione e l'adozione delle tecnologie quantistiche rappresenta un obiettivo da raggiungere nel prossimo futuro, al fine di fronteggiare scenari progressivamente complessi e fornire un valido contributo nell'ambito della protezione delle Forze schierate in differenti Teatri Operativi.

Il radar quantistico rappresenta una tecnologia con un diretto e fondamentale impatto sulla compagine militare, pertanto, lo studio e l'analisi delle peculiari modalità di funzionamento di tale dispositivo, contestualmente ad un potenziale e realistico impiego nelle operazioni delle Forze Armate, assume una significativa valenza tecnico-operativa.

Il radar quantistico consente di ottenere differenti vantaggi rispetto al paritetico sistema classico, in quanto esso è basato sulla propagazione di fotoni in uno stato *entangled*, risultante in una maggiore correlazione del segnale riflesso da un *target* e quello di riferimento. In tale contesto, lo sfruttamento del fenomeno di *entanglement* per l'identificazione di un bersaglio, risultante in una maggiore correlazione quantistica, rappresenta, di fatto, un miglioramento del rapporto segnale-rumore rispetto al caso classico. Ciò avrebbe un impatto significativo sulle operazioni militari, con particolare riferimento al campo dell'*intelligence*, ove i dispositivi radar sono sempre più impiegati per ottenere il miglioramento della *situational awareness* e consentire di adottare decisioni maggiormente attagliate al reale contesto operativo dello scenario di impiego.

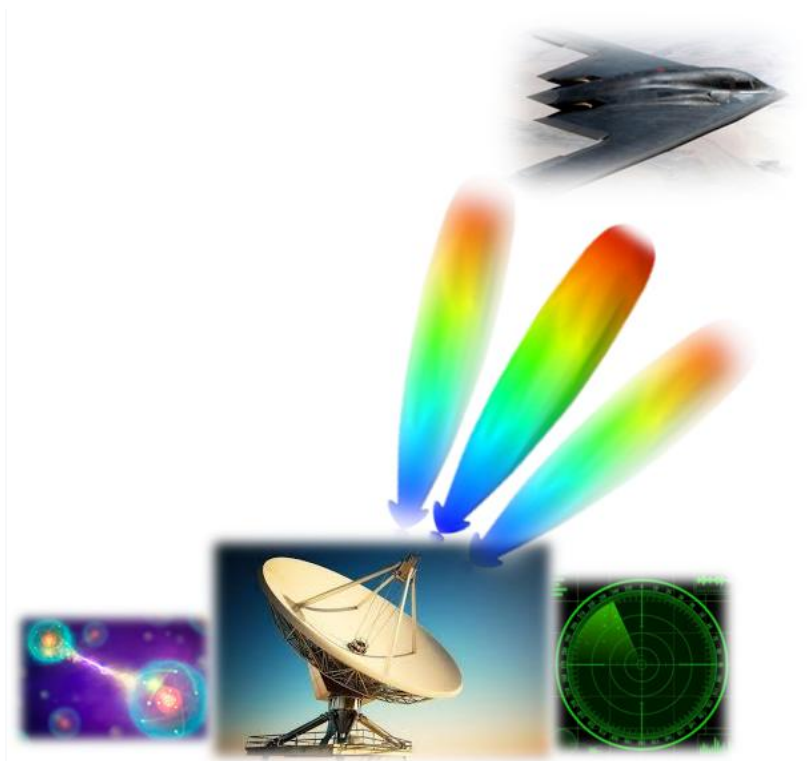
La Guerra Elettronica ed in generale il dominio elettromagnetico sono strumenti imprescindibili per la conduzione di un'operazione, con impatto trasversale sugli altri domini alla base delle operazioni militari (terrestre, navale, aereo e spaziale). L'impiego della tecnologia quantistica per la costruzione di un radar consentirebbe un raggiungimento e consolidamento del controllo dello spettro elettromagnetico sul campo di battaglia, presentando benefici sia da un punto di vista operativo sia informativo.

Riveste carattere di interesse, la maggiore capacità del radar quantistico di rilevare anche oggetti di tipologia *stealth*, consentendo di essere maggiormente coerenti alla progressiva evoluzione tecnologica degli assetti, contestualmente a conflitti di tipologia convenzionale e non. Altro punto nodale, è rappresentato dalle tematiche connesse alla Guerra Elettronica, ovvero alla robustezza del radar quantistico ad eventuali segnali di disturbo, in uno scenario ove lo spettro elettromagnetico risulta sempre più denso, in cui è richiesta un'incrementale robustezza dei segnali elettronici, volto al miglioramento dell'efficienza spettrale. L'ottenimento di una maggiore sensibilità a fronte di una

riduzione di emissione di potenza, potrebbe causare un potenziale *gap* all'interno dei sistemi ricevitori di auto-protezione installati sulle piattaforme militari per l'identificazione e l'analisi dei segnali elettromagnetici a premessa dell'adozione di specifiche contromisure finalizzate all'inibizione della minaccia (e.g. *chaff* e/o disturbi elettromagnetici direzionati sulla fonte di trasmissione tramite azione di *jamming*).

La tecnologia e i fenomeni fisici all'interno di un radar quantistico potrebbero avere un forte impatto anche nell'ambito del *remote sensing*, attraverso lo sviluppo di sensori quantistici. In particolar modo, attraverso un'analisi delle proprietà di penetrazione dei fotoni all'interno del terreno o della vegetazione, il dispositivo in parola potrebbe fornire risultati promettenti, in termini di rilevamento di eventuali oggetti sepolti sotto la superficie (e.g. IED – ordigni esplosivi improvvisati – e/o mine), remotizzando tale controllo a sistemi *unmanned* in attività di ricognizione in una specifica zona di operazione, per mitigare la minaccia di attentati durante le attività di pattugliamento.

In generale, il radar quantistico verrà analizzato in ottica comparativa con il caso classico, al fine di fornire e quantificare il reale impatto di impiego di tale dispositivo in ambito militare, studiando il sistema sia da un punto di vista architetturale sia tecnologico, e ponendo l'accento sui possibili impatti nel dominio elettromagnetico per la conduzione delle operazioni militari dei prossimi anni, con l'obiettivo di comprenderne l'andamento evolutivo e consolidare uno sviluppo concettuale conforme all'impiego di tecnologie quantistiche nel settore della Guerra Elettronica.



Fondamenti di meccanica quantistica

A premessa delle argomentazioni che verranno trattate in questa tesi sul radar quantistico, risulta fondamentale consolidare la base matematica su cui verrà analizzata questa tecnologia. Pertanto si effettuerà una premessa matematica del campo elettromagnetico quantizzato, partendo dalle equazioni di Maxwell, sino a descrivere i principali stati quantistici utili per la comprensione della seguente trattazione.

Campo elettromagnetico quantizzato

Nelle formule seguenti eviterò di trascrivere il simbolo vettoriale delle variabili per semplicità di notazione.

Equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\nabla \cdot E(r, t) = \frac{\rho(r, t)}{\varepsilon_0} \rightarrow \text{legge di Gauss per il campo } E \quad (1)$$

$$\nabla \cdot B(r, t) = 0 \rightarrow \text{legge di Gauss per il campo } B \quad (2)$$

$$\nabla \times E(r, t) + \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{legge di Faraday – Neumann – Lentz} \quad (3)$$

$$\nabla \times B(r, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} J(r, t) \rightarrow \text{legge di Ampere – Maxwell} \quad (4)$$

Legge di continuità della carica:

$$\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} + \nabla \cdot J(r, t) = 0 \quad (5)$$

Forza di Lorentz:

$$F = q(E(r, t) + v \times B(r, t)) \quad (6)$$

Variabili delle equazioni di Maxwell nel vuoto:

$E(r, t)$ = vettore campo elettrico

$B(r, t)$ = vettore induzione magnetica

$J(r, t)$ = vettore densità di corrente elettrica

$\rho(r, t)$ = densità superficiale di carica elettrica

c = velocità della luce nel vuoto

ε_0 = permeabilità dielettrica nel vuoto

$$B(r, t) = \nabla \times A(r, t) \quad (7)$$

$$E(r, t) = -\frac{\partial A(r, t)}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (8)$$

$A(r, t)$ = potenziale vettore

Φ = potenziale scalare

$$\nabla \cdot A(r, t) = 0 \text{ (gauge di Coulomb)} \quad (9)$$

Applicando il Gauge di Coulomb, si arriva a disaccoppiare le equazioni di Maxwell, dividendo le grandezze trasverse (a divergenza nulla) da quelle longitudinali (a rotore nullo).

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10)$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{J_{trasverso}}{\epsilon_0 c^2} \quad (11)$$

Relazione tra spazio reale (r) e spazio duale (k):

$$E(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1.5}} \int d^3r E(r, t) e^{-ik \cdot r} : \text{trasformata di Fourier spaziale tridimensionale} \quad (12)$$

$$E(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1.5}} \int d^3k E(k, t) e^{ik \cdot r} : \text{anti-trasformata di Fourier spaziale tridimensionale} \quad (13)$$

$$|k| = \frac{2\pi}{\lambda} : \text{modulo del vettore di propagazione} \quad (14)$$

Trasformo le equazioni di Maxwell nel Gauge di Coulomb nello spazio duale:

$$\frac{\partial^2 A(k, t)}{\partial t^2} + \omega^2 A(k, t) = 0 \quad (15)$$

Avente soluzione quella dell'equazione armonica:

$$A(k, t) = A(k) e^{-i\omega t} + A^*(k) e^{i\omega t} \quad (16)$$

Siccome:

$$En(r, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E^2(r, t) + c^2 B^2(r, t)) \quad (17)$$

Si ha che la densità di energia espressa nello spazio duale risulta:

$$En_k = \frac{1}{2} \epsilon_0 (|E_k|^2 + c^2 |B_k|^2) = 2\epsilon_0 \omega^2 A(k) A^*(k): \quad (18)$$

densità di energia delle componenti trasverse, espressa in funzione di A, considerando un'unica lunghezza d'onda. Questo consente di associare all'energia elettromagnetica del sistema, il potenziale vettore.

Si impone:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0\omega_k}} (\omega_k Q_k + iP_k) \quad (19)$$

$$A^*(k) = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0\omega_k}} (\omega_k Q_k - iP_k) \quad (20)$$

al fine di ottenere l'equazione di un oscillatore armonico:

$$En_k = 2\varepsilon_0\omega^2 A(k)A^*(k) = \frac{1}{2}(P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2): \quad (21)$$

densità di energia lungo la direzione k , in propagazione libera, associata alle componenti trasverse, in assenza di sorgenti. In questo modo, si è ricavata l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico di massa unitaria.

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{q}^2 + \omega^2 \hat{p}^2): \quad (22)$$

riscrivo l'Hamiltoniana (relativa ad un unico modo di propagazione e ad una singola frequenza) secondo 2 variabili fondamentali: il momento e la posizione.

Definisco i seguenti operatori (operatore momento e posizione):

$$\hat{q} = q \quad (23)$$

$$\hat{p} = -\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} \quad (24)$$

con, $\hbar = 6.626 \cdot 10^{-34} Js$: costante di Planck,

ove la commutazione tra gli operatori risulta (da questo momento l'apice degli operatori quantistici verrà sempre sottinteso per semplicità di notazione):

$$[q, p] = \frac{i\hbar}{2\pi} = i\hbar \quad (25)$$

Si definiscono i seguenti operatori quantistici:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q + ip) : \text{operatore di annichilazione} \quad (26)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q - ip) : \text{operatore di creazione (simbolo } dagger: \text{ trasposto coniugato)} \quad (27)$$

$$[a, a^\dagger] = 1 : \text{commutazione bosonica; in generale } [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (28)$$

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) : \text{Hamiltoniana oscillatore armonico quantistico} \quad (29)$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle : \text{l'Hamiltoniana del sistema presenta degli auto-stati e l'energia è quantizzata} \quad (30)$$

$|n\rangle$: auto-stato associato ad uno specifico livello energetico (31)

Equazioni del campo elettromagnetico quantizzato:

$$aH|n\rangle = E_n a|n\rangle \Rightarrow Ha|n\rangle = (E_n - \hbar\omega) a|n\rangle \quad (32)$$

$$a^\dagger H|n\rangle = E_n a^\dagger |n\rangle \Rightarrow Ha^\dagger |n\rangle = (E_n + \hbar\omega) a^\dagger |n\rangle \quad (33)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (34)$$

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (35)$$

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle \quad (36)$$

$$|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}|0\rangle}{\sqrt{n!}} : \text{stati di Fock,} \quad (37)$$

espressi in funzione dello stato di vuoto e dell'operatore di creazione.

La funzione di tipo quadratico dell'Hamiltoniana del sistema si esplica in un andamento parabolico dei livelli energetici associati ai rispettivi auto-stati, i quali sono quantizzati e sono caratterizzati da un minimo sotto il quale non è possibile andare ($a|\alpha\rangle=0$). Tale stato fondamentale, denominato stato di vuoto, rappresenta di fatto uno stato con zero fotoni, la cui energia totale non è nulla, bensì pari ad una quantità infinita. L'energia dello stato di vuoto mono modale è infatti pari a $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, il cui risultato indica che nello spazio con zero fotoni esistono delle fluttuazioni, fornite da particelle virtuali (non misurabili), che forniscono energia al sistema.

La quantizzazione del campo elettromagnetico, descritta dalle equazioni precedentemente riportate, consente di effettuare un passaggio da uno stato energetico all'altro, sino ad uno stato minimo, ove la differenza energetica tra gli stati risulta essere pari a $\hbar\omega$. Considerando la parabola descritta dall'Hamiltoniana del sistema, il passaggio da uno stato energetico inferiore o superiore è ottenuto applicando rispettivamente l'operatore di distruzione o di creazione allo stato stesso.

Sapendo che:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega x + ip) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\omega x + \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (38)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\omega x + \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) |0\rangle = 0 \quad (39)$$

$$\left(\omega x |0\rangle + \hbar \frac{\partial}{\partial x} |0\rangle \right) = 0 \quad (40)$$

Si ricava la rappresentazione nello spazio delle posizioni, applicando la proiezione sulle posizioni ed ottenendo un'equazione differenziale:

$$\left(\omega x \langle x|0\rangle + \hbar \frac{\partial}{\partial x} \langle x|0\rangle\right) = 0 \quad (41)$$

$$\langle x|0\rangle = \psi(x) : \text{funzione d'onda nello spazio delle posizioni} \quad (42)$$

$$\frac{d\psi(x)}{\psi(x)} = -\frac{\omega}{\hbar} x dx \quad (43)$$

$$\psi(x) = C e^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}} \quad (44)$$

si ottiene una funzione Gaussiana, ovvero considerando una particella nello stato di vuoto in un campo elettromagnetico si ottiene una specifica distribuzione di probabilità con una deviazione standard. Pertanto, non si riesce ad ottenere l'esatta posizione della particella.

$$2\sigma_x^2 = \frac{2\hbar}{\omega} \quad (45)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}} \quad (46)$$

Nel caso si avesse, oltre all'energia cinetica, anche un profilo di energia potenziale (confinamento), ci si aspetta che il pacchetto gaussiano oscilli mantenendo la propria forma (coerenza). Quando si è in presenza di operatori che non commutano, questi devono rispettare il principio di indeterminazione di Heisenberg. Al fine di ottenere l'oscillazione della funzione d'onda, non variando la forma e la varianza, bisogna imporre il minor scostamento nel principio di indeterminazione di Heisenberg.

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\sigma x^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma x^2} + \frac{i p x}{\hbar}}; \quad (47)$$

equazione della funzione gaussiana in funzione del momento e della posizione, con

$$\sigma x^2 = 2 \langle \Delta x^2 \rangle. \quad (48)$$

Si ottiene un pacchetto d'onda che minimizza il principio di indeterminazione di Heisenberg, avente una forma gaussiana caratterizzata dal valor medio della posizione e da un termine di momento (valor medio) che tiene conto dello spostamento della particella.

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta p^2 \rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 : \text{minimizzazione del principio di indeterminazione di Heisenberg} \quad (49)$$

$$\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle = \int dx \langle \psi | x \rangle x \langle x | \psi \rangle, \quad (50)$$

ottenendo i valori medi e i quadrati dei valori medi di posizione e momento.

$$\langle x \rangle = \bar{x} \quad (51)$$

$$\langle p \rangle = \bar{p} \quad (52)$$

$$\langle x^2 \rangle = \bar{x}^2 + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \quad (53)$$

$$\langle p^2 \rangle = \bar{p}^2 + \frac{\hbar^2}{2\sigma_x^2} \quad (54)$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi \sigma_x^2}} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)} H_n\left(\frac{x}{\sigma_x}\right), \quad (55)$$

$$\text{con } H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} : \text{polinomi di Hermite} \quad (56)$$

$$C_n = \int dx \psi_n^*(x) \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n e^{\frac{i}{2\hbar} \bar{p} \bar{x} - \frac{1}{2} |\alpha|^2} \quad (57)$$

Da questa espressione trovata sui coefficienti degli stati numero, il termine di fase è possibile riassorbirlo all'interno della funzione d'onda iniziale.

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\sigma x^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma x^2} + \frac{i \bar{p} x}{\hbar}} e^{\frac{i}{2\hbar} \bar{p} \bar{x}} \quad (58)$$

In questo modo si esprime la funzione d'onda espressa con le funzioni d'onda associate agli stati numero.

$$\psi(x) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x) \quad (59)$$

$$\langle x | \alpha \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle x | n \rangle \quad (60)$$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \quad (61)$$

espressione dello stato coerente come combinazione lineare degli stati numero, ove i coefficienti C_n rappresentano il peso della sommatoria.

$$|C_n|^2 = P_n = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!} \quad (62)$$

distribuzione Poissoniana, in cui $|\alpha|^2$ rappresenta il numero medio di fotoni, dove risiede il picco della curva di probabilità.

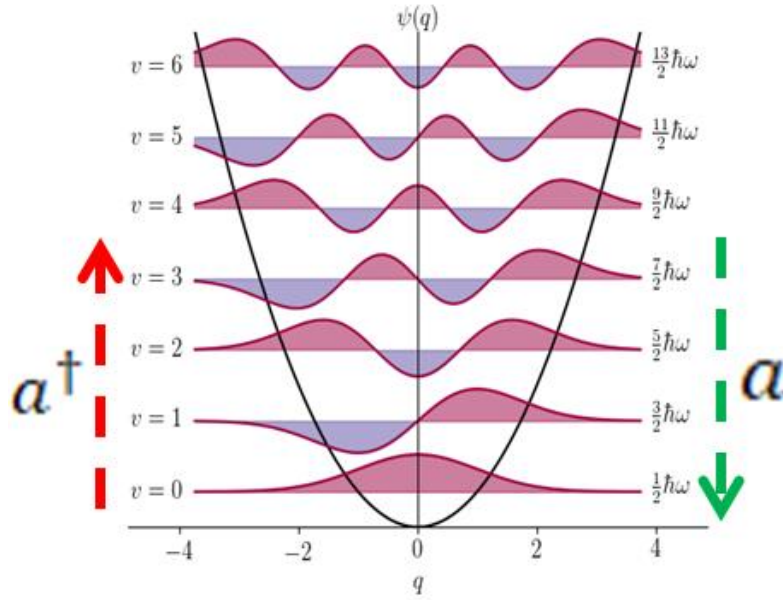


Figura 1: Rappresentazione grafica dell'oscillatore armonico quantistico relativo alla quantizzazione del campo elettromagnetico.

Stati coerenti

Gli stati coerenti sono caratterizzati da una funzione gaussiana che oscilla con la medesima forma, costituiti da una combinazione lineare di infiniti stati di Fock e con numero medio di fotoni pari a $|\alpha|^2$. Da un punto di vista matematico, si evince che il movimento della gaussiana in uno stato coerente avviene tramite il termine di momento (driver). Nello stato di vuoto l'oscillatore armonico è rappresentato da una gaussiana ed applicando l'operatore di displacement allo stato di vuoto mi fornisce in maniera generalizzata gli stati coerenti.

$$D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle \quad (63)$$

$$D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} : \text{operatore di displacement} - \text{forma entengolata} \quad (64)$$

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} : \text{operatore di displacement} - \text{forma disintengolata (disentengolare vuol significare esprimere l'esponente di somma come prodotto di esponenti, poiché il commutatore degli operatori quantistici non commuta - commutazione bosonica)}. \quad (65)$$

$$\langle n | a^\dagger a | n \rangle = \bar{n} : \text{espressione del numero medio di fotoni, in relazione agli stati di Fock} \quad (66)$$

$$\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2 : \text{del numero medio di fotoni, in relazione agli stati coerenti} \quad (67)$$

Il numero medio di fotoni di uno stato coerente è pari al modulo quadro di alfa, poiché uno stato coerente rappresenta un auto-stato dell'operatore di distribuzione (equazioni degli auto valori).

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (68)$$

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|^\dagger = \langle\alpha|a^\dagger = \alpha^* \quad (69)$$

Lo stato coerente si avvicina ad un'onda elettromagnetica classica o all'emissione di un laser. Inoltre lo stato di vuoto rappresenta uno stato coerente (equazione di auto valori).

La distribuzione poissoniana di uno stato coerente è caratterizzato da una varianza e da un valor medio pari a $|\alpha|^2$. Nello spazio delle fasi, a differenza del caso classico, non si avrà una linea ma una fascia, dovuta alla proiezione nel piano della gaussiana (indeterminazione). L'applicazione dell'operatore di displacement ad uno stato coerente consente di spostare dall'origine lo stato e viceversa nel caso in cui si considera l'operatore di displacement trasverso coniugato.

L'operatore di displacement costituisce un operatore unitario, che applicato ad uno stato ne restituisce un altro. La condizione di unitarietà, necessaria per mantenere le probabilità invariate, consente che il prodotto tra l'operatore e il suo trasposto coniugato restituisce la matrice identità. L'operatore di displacement è un operatore unitario.

Siccome è possibile definire una funzione generica nella variabile complessa z e dipendente dagli operatori di distruzione e creazione - $G(z; a, a^\dagger) = e^{az} a^\dagger e^{-az}$ (70) - applicando una derivazione rispetto alla variabile z e risolvendo a variabili separabili l'equazione differenziale, risulta possibile esprimere una generica funzione tramite un'espressione lineare rispetto alla variabile complessa (z) e agli operatori quantistici, di distruzione e/o creazione - $G(z; a, a^\dagger) = a^\dagger + z$ (71).

$$e^{-z^* a^\dagger} a e^{z^* a^\dagger} = a + z^* \quad (72)$$

$$e^{\alpha a^\dagger} a e^{-\alpha a^\dagger} = (a - \alpha) \quad (73)$$

$$D(\alpha) a D(\alpha)^\dagger D(\alpha)|0\rangle = (a - \alpha)|\alpha\rangle: \text{equazione degli auto valori degli stati coerenti} \quad (74)$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1: \quad (75)$$

gli stati coerenti sono normali, in quanto, esprimendo gli stati coerenti come combinazione lineare di stati numero, si giunge ad una sommatoria di funzioni esponenziali. Tale espressione consente di trovare l'espressione del prodotto interno di uno stato coerente in funzione di stati di Fock, il quale, per ortonormalità, risulta uguale ad una delta di Kronecker, facendo in modo di ottenere l'espressione di una serie di Fourier di una funzione esponenziale reciproca rispetto al fattore costante relativo al numero medio di fotoni ($e^{-|\alpha|^2}$), ottenendo come risultato l'unità (condizione di normalità dello stato coerente).

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} e^{\alpha^* \beta} \neq 0: \quad (76)$$

gli stati coerenti non sono ortonormali, a differenza degli stati di Fock.

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}; \quad (77)$$

se gli stati sono molto distanti tra di loro, l'andamento esponenziale tende ad annullarsi, consentendo di considerare gli stati come quasi ortonormali.

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I: \quad (78)$$

relazione di completezza; il sistema costituito da stati numero risulta essere completo, ovvero la sommatoria di tutti i proiettori che lo compongono risulta pari alla matrice identità.

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \pi: \quad (79)$$

il sistema costituito da stati coerenti rappresenta un sistema super-completo.

L'equazione di autovalori di uno stato coerente ($a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$) si ottiene applicando l'operatore di distruzione sul ket dello stato coerente, che conduce alla dimostrazione che la varianza della distribuzione di probabilità poissoniana - $P_n(\alpha) = \left(\frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^n}{n!}\right)$ (80) - coincide con il valor medio - $\langle n \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = |\alpha|^2$ (81)

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle: \quad (82)$$

applicazione dell'operatore di distruzione sul ket dello stato coerente.

L'applicazione dell'operatore di creazione sul ket dello stato coerente, tenendo in considerazione che l'operatore di distruzione applicato allo stato di vuoto conduce ad un risultato nullo, è necessario per dimostrare la non ortonormalità tra stati coerenti, tramite lo sviluppo di un'equazione differenziale a variabili separabili.

$$a^\dagger |\alpha\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\alpha^*}{2}\right) |\alpha\rangle \Rightarrow \langle \alpha | a = \langle \alpha | \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{\alpha}{2}\right): \quad (83)$$

applicazione dell'operatore di creazione sul ket dello stato coerente.

Teorema del no cloning: non risulta possibile copiare uno stato quantistico a meno che non lo osservo. Il teorema del no cloning è alla base delle comunicazioni sicure quantistiche, impiegate ad esempio nella distribuzione delle chiavi crittografiche QKD (Quantum Key Distribution); al fine di mantenere la sicurezza, si necessita la trasmissione di un singolo fotone, poiché qualora venissero emessi più fotoni, potenzialmente una spia potrebbe riceverne qualcuno e verificare lo stato trasmesso nel canale di comunicazione.

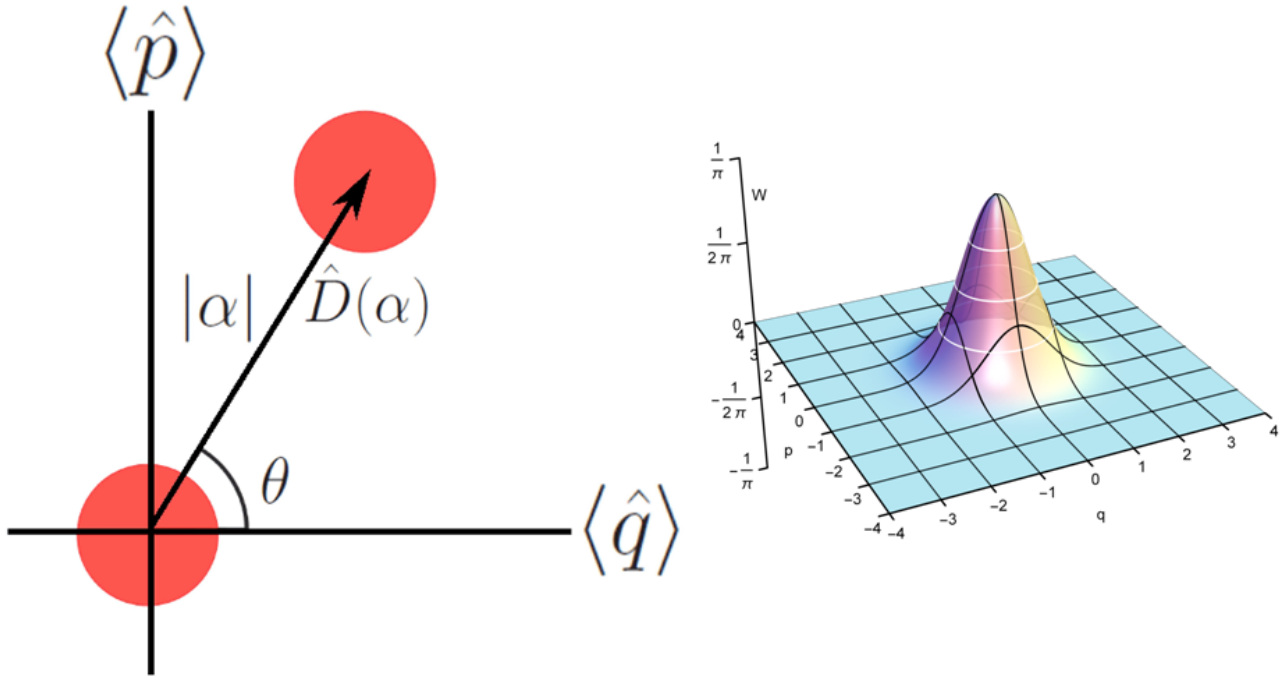


Figura 2: Stato coerente con operatore di displacement nello spazio cartesiano posizione e momento e rappresentazione della funzione gaussiana degli stati coerenti.

Stati squeezed

La trasmissione di un fascio di fotone sulla superficie di un cristallo non lineare (e.g. BBO – Beta Borato di Bario), in talune condizioni, dà vita ad un fenomeno fisico denominato PDC – Parametric Down Conversion. Ovvero, un singolo fotone, denominato di pompa, che attraversa il cristallo non lineare dà origine ad una coppia di fotoni in uscita, denominati signal e idler, che rispettano il phase matching, ovvero la conservazione di energia - $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ (84) - e la conservazione del momento - $\bar{k}_p = \bar{k}_s + \bar{k}_i$ (85).

Il phase mathcing può essere di due tipologie, a seconda della relazione tra la polarizzazione di ingresso e dei fasci di uscita (“e” indica la polarizzazione straordinaria, mentre “o” quella ordinaria).

Phase matching di tipo 1: e_in => o_out1, o_out2

Phase matching di tipo 2: e_in => o_out1, e_out2

Phase matching di tipo 2: e_in => e_out1, o_out2

Relativamente agli stati squeezed vanno considerate due Hamiltoniane differenti, di seguito riportate:

1. $a_p a^{\dagger 2}$ (86)

2. $a_p a_1^{\dagger} a_2^{\dagger}$ (87)

i diversi pedici negli operatori di creazione stanno ad indicare che ho la generazione di una coppia di fotoni con differenti vettori di propagazione e differenti lunghezze d'onda. Ancora più in generale si potrebbe avere la generazione di due fotoni con differenti polarizzazioni (phase matching di tipo 2).

In generale le Hamiltoniane sono costituite dall'operatore di distruzione sul fascio di pompa e da un operatore di creazione che descrive la generazione della coppia di fotoni all'uscita del cristallo non lineare.

Alle Hamiltoniane sopra descritte corrispondono due operatori squeezed, ove non compare l'operatore di distruzione associato al campo di pompa, bensì una variabile complessa (ζ).

$$1. \quad a_p a^{\dagger 2} \Rightarrow S_1(\zeta) = e^{-\frac{1}{2}(\zeta a^{\dagger 2} - \zeta^* a^2)} \quad (88)$$

$$2. \quad a_p a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} \Rightarrow S_2(\zeta) = e^{(\zeta a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} - \zeta^* a_1 a_2)} \quad (89)$$

Considerando di applicare un campo di pompa descritto da uno stato coerente e ricordando l'equazione di autovalori dello stato coerente, si deduce che all'interno della variabile squeezed ζ bisogna tener conto dell'intensità del campo di pompa, dell'efficienza di conversione del cristallo (non tutti i fotoni subiranno il processo di down conversione) e il tempo di interazione. La variabile ζ risulta un parametro fondamentale su cui agire per la generazione di stati entangled. Relativamente al cristallo bisogna considerare un trade-off tra il tempo di interazione (ad esempio ottenuto con un cristallo lungo) e l'intensità del campo di pompa. In generale l'efficienza di conversione dipende quadraticamente dall'intensità e linearmente dal tempo di interazione.

$$\zeta = r e^{i\varphi\zeta} \quad (90)$$

espressione della variabile complessa ζ , ove il termine di fase è legato alla fase del campo di pompa.

Considero adesso l'operatore $S_1(\zeta) = S(\zeta)$, associato all'Hamiltoniana corrispondente dello stato squeezed.

$$G(z) = S^z(\zeta) \quad (91)$$

$$a(z) = G(z) a G^{\dagger}(z), \text{ con } G^{\dagger}(z) = S^z(-\zeta) \quad (92)$$

$$\frac{da(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left(e^{-\frac{1}{2}(\zeta a^{\dagger 2} - \zeta^* a^2)z} a e^{\frac{1}{2}(\zeta a^{\dagger 2} - \zeta^* a^2)z} \right) = G(z) \left[a, \frac{1}{2}(\zeta a^{\dagger 2} - \zeta^* a^2) \right] G^{\dagger}(z): \quad (93)$$

espressione della derivata dell'operatore di distruzione squeezed rispetto alla variabile z , espressa in funzione di un commutatore di funzioni.

Siccome:

$$[a, a^{\dagger 2}] = 2a^{\dagger} \quad (94)$$

Da cui si deriva che:

$$\frac{da(z)}{dz} = \zeta G(z) a^\dagger G^\dagger(z) \quad (95)$$

Posto $a^\dagger(z) = G(z) a^\dagger G^\dagger(z)$, si ricava una coppia di equazioni differenziali:

$$\frac{da(z)}{dz} = \zeta a^\dagger(z) \quad (96)$$

$$\frac{da^\dagger(z)}{dz} = \zeta^* a(z) \quad (97)$$

Risolvendo il sistema di equazioni differenziali, si ottiene:

$$a(z) = C_1 e^{|\zeta|z} + C_2 e^{-|\zeta|z} = \frac{1}{2} (a + e^{i\varphi\zeta} a^\dagger) e^{|\zeta|z} + \frac{1}{2} (a - e^{i\varphi\zeta} a^\dagger) e^{-|\zeta|z} = a \cosh(|\zeta|z) + a^\dagger e^{i\varphi\zeta} \sinh(|\zeta|z) \quad (98)$$

$$a(1) = S(\zeta) a S^\dagger(\zeta) = a \cosh|\zeta| + a^\dagger e^{i\varphi\zeta} \sinh|\zeta|: \quad (99)$$

operatore squeezed (unitario) applicato allo stato di distruzione. In questo modo si ricavano gli operatori trasformati degli stati squeezed.

$$a' = S(\zeta) a S^\dagger(\zeta) = a \cosh|\zeta| + a^\dagger e^{i\varphi\zeta} \sinh|\zeta| = \mu a + \nu a^\dagger \quad (100)$$

$$a^{\dagger'} = S(\zeta) a^\dagger S^\dagger(\zeta) = a^\dagger \cosh|\zeta| + a e^{-i\varphi\zeta} \sinh|\zeta| = \mu a^\dagger + \nu^* a \quad (101)$$

$$[a', a^{\dagger'}] = \mu^2 - |\nu|^2 = 1: \quad (102)$$

verifica della commutazione bosonica tra gli operatori trasformati.

$$S(\zeta)|0\rangle = |\zeta\rangle: \quad (103)$$

l'applicazione dell'operatore squeezed allo stato di vuoto restituisce uno stato squeezed.

Relativamente agli stati coerenti è stato dimostrato che lo stato di vuoto è uno stato coerente con autovalore nullo (equazione di autovalori degli stati coerenti). Analogamente, risulta fondamentale trovare l'espressione matematica dell'applicazione dell'operatore di distruzione squeezed ad uno stato squeezed, al fine di ricavare, il numero medio di fotoni.

$$a'|\zeta\rangle = S(\zeta) a S^\dagger(\zeta) S(\zeta)|0\rangle = S(\zeta) a|0\rangle = 0: \quad (104)$$

semplificazione ottenuta dalla proprietà di unitarietà degli operatori squeezed (componente normale ed hermitiana).

$$\bar{n} = \langle \zeta | a^\dagger a | \zeta \rangle = |\nu|^2 = \sinh^2|\zeta|: \quad (105)$$

espressione del numero medio di fotoni di uno stato squeezed.

$$\text{Ponendo } \Gamma(r) = \tanh|r|, \quad (106)$$

con $r = |\zeta|$.

$$S(\zeta)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \sum_n -\frac{\tanh^n(r) e^{in\varphi\zeta}}{2^n n!} \sqrt{(2n+1)} |2n\rangle : \quad (107)$$

esprimendo l'operatore squeezed in forma disentanglata, si trova una sovrapposizione di stati di Fock tutti pari.

Nel cristallo ho un processo di rigenerazione di una coppia di fotoni (2, 4, 6, ...) con una certa distribuzione di probabilità. Pertanto, incidendo con un laser (stato coerente) su un cristallo non lineare si generano coppie di fotoni in sovrapposizione.

Le differenze fra uno stato coerente attenuato ed uno stato squeezed attenuato sono diverse. In primo luogo, avendo trovato un'espressione degli stati squeezed in funzione degli stati numero, è possibile, facendo il modulo al quadrato del peso all'interno della sommatoria, ricavare la distribuzione di probabilità degli stati squeezed.

$$|\zeta\rangle = \sum_n C_{2n} |2n\rangle \quad (108)$$

$$|C_{2n}|^2 = P_{2n} = \frac{1}{\cosh(r)} \tanh^{2n}(r) \frac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2} : \quad (109)$$

la distribuzione di probabilità degli stati squeezed corrisponde ad una Bose-Einstein (distribuzione termica). Questa distribuzione corrisponde alla probabilità di generare in uscita $2n$ fotoni.

Supponendo che r è molto piccolo, ovvero l'intensità del laser è bassa, è possibile effettuare le seguenti approssimazioni:

$$\cosh(r) \rightarrow 1 \quad (110)$$

$$\tanh(r) \rightarrow \sinh(r) \quad (111)$$

Per quanto concerne una Bose-Einstein, se si abbassa il valore di r , la probabilità che vengano generati più fotoni rispetto al valore medio, risulta essere molto minore, rispetto a quello ottenuto con una distribuzione poissoniana (stati coerenti). Per questa motivazione, relativamente alle comunicazioni quantistiche, si preferisce impiegare stati squeezed, ove la distribuzione è maggiormente controllabile, parametro fondamentale per la caratterizzazione di un canale trasmissivo.

Tali processi non lineari possono essere sfruttati se, relativamente allo stato di partenza, non si considera quello di vuoto, bensì uno stato a singolo fotone. In questo modo, considerando effetti al primo ordine, si può giungere alla creazione di due fotoni. Pertanto, oltre alla pompa è possibile inviare anche un singolo fotone, al fine di ottenere un processo di amplificazione del fotone stesso.

Considerando il secondo operatore squeezed precedentemente definito, $S_2(\zeta) = e^{(\zeta a_1^\dagger a_2^\dagger - \zeta^* a_1 a_2)}$, esprimendolo in forma disentanglata, analogamente al caso precedente, si ricava l'espressione dello stato squeezed associato, sotto forma di combinazione lineare di stati di Fock.

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{\cosh(r)} \sum_n \frac{1}{n!} \tanh^n(r) e^{in\varphi_\zeta} |n, n\rangle = \sum_n C_{n,n} |n, n\rangle \quad (112)$$

Da cui si ricava l'espressione della distribuzione di probabilità dello stato squeezed:

$$|C_{n,n}|^2 = P_{n,n} = \frac{1}{\cosh^2(r)} \tanh^{2n}(r) = \frac{1}{(1+\sinh^2 r)^{n+1}} (\sinh^2 r): \quad (113)$$

distribuzione di probabilità degli stati squeezed corrisponde ad una Bose-Einstein (distribuzione termica), espressa in funzione del numero medio di fotoni ($\sinh^2 r = \bar{n}$), ovvero alla potenza inviata al cristallo non lineare.

Dall'espressione suddetta si ricava la formulazione di uno stato squeezed in termini di combinazione lineare di stati di Fock ed in funzione del numero medio di fotoni:

$$|\zeta\rangle = \sum_n \sqrt{\left(\frac{\bar{n}^n}{(\bar{n}+1)^{n+1}}\right)} |n, n\rangle \quad (114)$$

Considerando un basso e alto numero medio di fotoni, ottenendo le seguenti espressioni:

$$P_{n,n} = \bar{n}^n, \quad (115)$$

con $\bar{n} \ll 1$, si ricava una funzione monotona decrescente (la decrescenza monotona della distribuzione di probabilità nel caso di bassa intensità del segnale di pompa, consente un agevole controllo della sorgente non lineare).

$$P_{n,n} = \frac{1}{\bar{n}}, \quad (116)$$

con $\bar{n} \gg 1$: si ottiene una funzione costante.

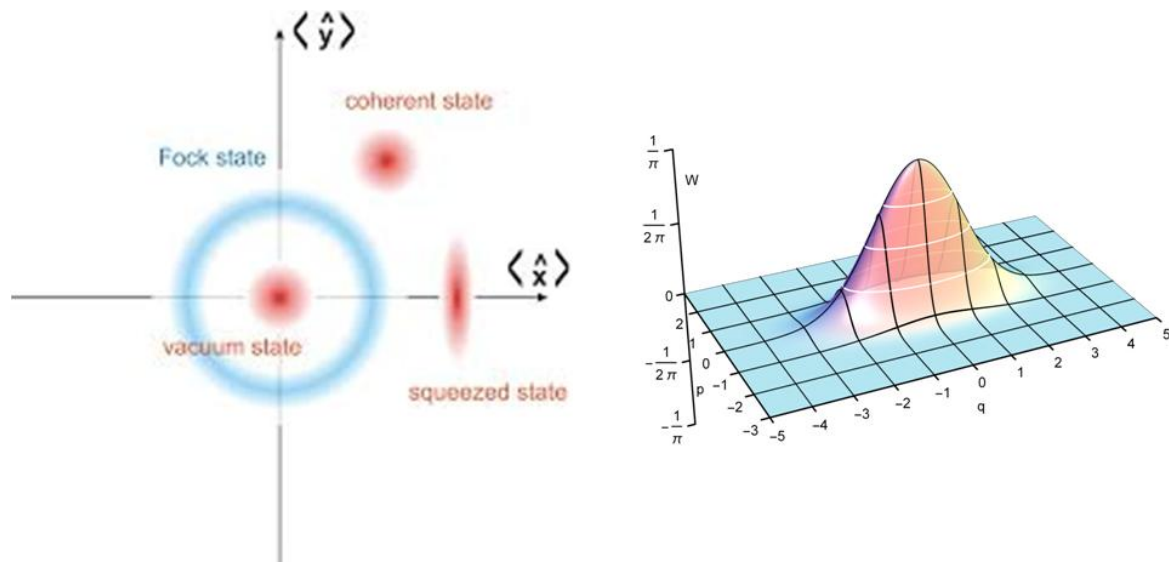


Figura 3: Stato squeezed, stato coerente, stato di vuoto e stato numero per compararne la proiezioni delle relative gaussiane nello spazio posizione e momento. Rappresentazione tridimensionale della gaussiana corrispondente ad uno stato squeezed.

Distribuzioni di probabilità dello stato coerente e squeezed

Al fine di comparare da un punto di vista probabilistico gli stati quantistici coerente e squeezed, si è creato un file excel in grado di rappresentare graficamente le relative distribuzioni di probabilità sopra descritte. Fornendo in ingresso il numero medio di fotoni, il foglio di calcolo fornisce i valori puntuali della funzione di probabilità, permettendo una comparazione grafica tra gli stati coerenti e squeezed, elemento fondamentale per comprendere la statistica del trasmettitore.

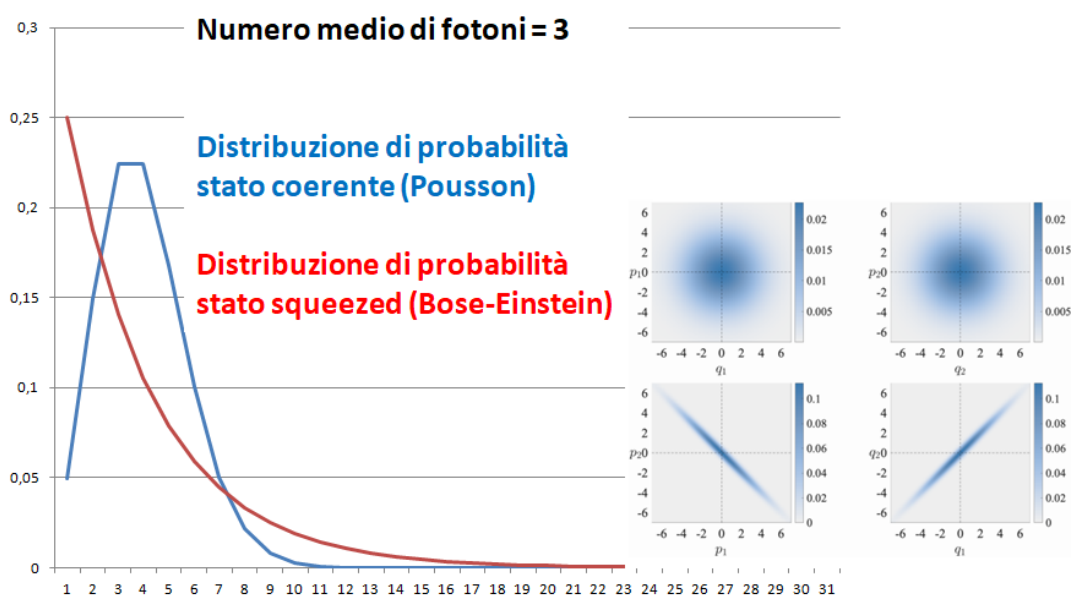


Figura 4: Grafico delle distribuzioni di probabilità degli stati coerente e squeezed, con le relative proiezioni gaussiane rispetto alla posizione ed al momento.

Sfera di Bloch e matrice densità

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle: \quad (117)$$

stati coerenti (distribuzione di probabilità Poussoniana e numero medio di fotoni pari a $|\alpha|^2$)

$$|\zeta\rangle = S(\zeta)|0\rangle: \quad (118)$$

stati squeezed (distribuzione di probabilità Bose-Einstein e numero medio di fotoni pari a $\sinh^2(r)$)

Queste sono le sorgenti alla base dell'informazione quantistica, ma bisogna considerare anche un altro grado di libertà per effettuare una codifica informativa, come ad esempio la polarizzazione, in rappresentazione quantistica.

$|0\rangle$: *polarizzazione orizzontale*

$|1\rangle$: *polarizzazione verticale*

$|+\rangle$: *polarizzazione diagonale*

$|-\rangle$: *polarizzazione anti – diagonale*

$|R\rangle$: *polarizzazione circolare destra*

$|L\rangle$: *polarizzazione circolare sinistra*

Le polarizzazioni descritte rappresentano, a coppia, una base dello spazio di Hilbert. Pertanto, è possibile esprimerle come combinazione lineare di una particolare base (e.g. in termini di polarizzazione orizzontale e verticale).

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (119)$$

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (120)$$

$$|R\rangle = \frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (121)$$

$$|L\rangle = \frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (122)$$

Relativamente alla quantum information, l'unità di base dell'informazione risulta il qubit, il quale potrebbe essere rappresentato in diversi modi, come ad esempio la polarizzazione di un fotone, lo spin di un elettrone oppure con un sistema atomico a due livelli. A prescindere dalla scelta tecnologica di rappresentazione del qubit, la matematica alla base di tali sistemi rimane la stessa. Pertanto, si prende in considerazione il caso della polarizzazione, che, per trasposizione, potrebbe essere poi estesa agli altri sistemi di qubit.

Nel caso di comunicazione quantistica, i detector posti al ricevitore, rappresentano da un punto di vista matematico dei proiettori sulle basi ortonormali di riferimento scelte per il sistema, ovvero un prodotto esterno nello spazio di Hilbert.

Nel caso in cui lo stato quantistico non fosse puro, ovvero sia affetto da rumore, al fine di conoscere il qubit, bisogna considerare la matrice densità.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle: \quad (123)$$

definizione di un generico stato quantistico come combinazione lineare delle basi del sistema.

$$\pi_j = |j\rangle\langle j| : \quad (124)$$

il prodotto esterno tra le basi di un sistema, rappresenta il proiettore relativo alla specifica base.

$$P_j(j) = \sum_x \langle \psi_x | \pi_j | \psi_x \rangle P_x(x): \quad (125)$$

probabilità totale di ottenere j , pesata su tutti gli stati $|\psi_x\rangle$ con la loro probabilità $P_x(x)$, dove x appartiene all'insieme dell'alfabeto, ovvero nel nostro caso 0 o 1 – polarizzazione orizzontale o verticale.

$$P_j(j) = Tr\{\pi_j \rho\}: \quad (126)$$

applicando la definizione di traccia matriciale, risulta possibile esprimere la probabilità totale di ottenere j , in funzione del proiettore della base e della matrice densità.

$$\rho = \sum_x |\psi_x\rangle\langle\psi_x| P_x(x): \quad (127)$$

definizione matematica della matrice densità di un sistema.

Quando si trattano le matrici densità per la definizione di un sistema quantistico, si deve considerare lo spazio di Hilbert-Smith.

La matrice densità ha le seguenti proprietà, per la caratterizzazione di un sistema fisico:

1. $\rho = \rho^\dagger$: la matrice densità deve essere Hermitiana;
2. $Tr\{\rho\} = 1$: la traccia della matrice densità deve essere unitaria;
3. $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0$: la matrice densità è semi-definita positiva, ovvero gli auto-valori devono essere maggiori o uguali a zero.

I termini sulla diagonale principale sono detti di popolazione (probabilità di avere i singoli stati che popolano il sistema), mentre quelli sull'anti-diagonale sono detti di coerenza.

$$\rho = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & 1-a \end{pmatrix}: \quad (128)$$

termini sulla diagonale principali sono reali, mentre quelli sull'anti-diagonale sono complessi. Pertanto, per trovare i coefficienti della matrice si dovranno effettuare tre misurazioni distinte: a , $|c|$ e la fase di c .

$$c = \sqrt{ab} : \text{in caso di stato puro;} \quad (129)$$

$$c \leq \sqrt{ab} : \text{in caso di stato non puro.} \quad (130)$$

Nello spazio di Hilbert-Smith il prodotto interno definito nello spazio di Hilbert corrisponde alla traccia delle relative matrici. La matrice densità si rappresenta come combinazione lineare di matrici di base con dei coefficienti, definiti come proiezioni della matrice densità sulle rispettive basi ($Tr\{\rho\sigma\}$).

Si definiscono i seguenti proiettori, denominati matrici di Pauli:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (131)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (132)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (133)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (134)$$

Siccome la matrice identità non ha alcun elemento informativo, il termine unitario si trascura, al fine di scrivere la matrice densità in tre dimensioni, per ottenere una rappresentazione grafica del qubit sulla sfera di Bloch. All'interno di questa sfera il qubit può subire rotazioni, tenendo l'origine del vettore (con modulo massimo unitario, per un sistema puro) fissato nel centro della suddetta sfera.

$$\rho = \frac{I + (s \cdot \sigma)}{2}; \quad (135)$$

matrice densità in funzione delle matrici di Pauli e dei parametri di Bloch.

Da un punto di vista trigonometrico si possono esprimere i parametri di Bloch, per ottenere la rappresentazione generale di uno stato in forma spinoriale.

θ : angolo formato dal vettore sulla sfera di Bloch con l'asse z ;

φ : angolo formato dalla proiezione del vettore sulla sfera di Bloch rispetto al piano xy , rispetto all'asse x .

$$|\psi(s)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (136)$$

Sulla sfera di Bloch è possibile associare sull'asse z le polarizzazioni orizzontali e verticali, sull'asse x le polarizzazioni diagonali e anti-diagonali e sull'asse y le polarizzazioni circolari destrorse e sinistrorse.

I parametri di Bloch sono uguali alla traccia del prodotto matriciale tra la relativa matrice di Pauli (proiettore) e la matrice densità.

Da un punto di vista di apparato impiegato per effettuare comunicazione quantistica, esso è costituito da un beam splitter polarizzatore e lamine a lambda quarti e lambda mezzi. Le lamine hanno due assi, di cui uno veloce e uno lento, in cui il fotone con stessa polarizzazione dell'asse veloce ha un basso indice di rifrazione e quindi maggiore velocità di gruppo. Ciò, introduce uno sfasamento, in cui la fase è legata alla lunghezza, allo spessore della lamina e all'indice di rifrazione.

Si definisce:

$\varphi = kL$: fase della lamina ($\varphi = \pi$ nel caso di lamina a $\lambda/2$; $\pi/2$ nel caso di lamina a $\lambda/4$);

α : angolo di rotazione degli assi della lamina rispetto al riferimento.

Matematicamente l'effetto delle lamine sono descritte dal prodotto di tre matrici:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (137)$$

Da ciò deriva che in funzione dell'asse di rotazione delle lamine, risulta possibile ricavare i tre gradi di polarizzazione in fase di misurazione, fondamentale per la definizione dei parametri di Bloch in funzione della differenza dei conteggi ottenuti sui detector, normalizzati rispetto al numero totale di conteggi rilevati:

$$\alpha_{\lambda/2} = \alpha_{\lambda/4} = 0 \Rightarrow |0\rangle, |1\rangle \quad (138)$$

$$\alpha_{\lambda/2} = \frac{\pi}{8}; \alpha_{\lambda/4} = 0 \Rightarrow |+\rangle, |-\rangle \quad (139)$$

$$\alpha_{\lambda/2} = 0; \alpha_{\lambda/4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |R\rangle, |L\rangle \quad (140)$$

L'attività di ricostruzione della matrice densità è detta tomografia quantistica. Le misure per ricavare i parametri di Bloch si dovranno effettuare su N fotoni (che devono essere preparati nello stesso stato) e non contemporaneamente. In tale modo, la ricostruzione della matrice densità consente di conoscere lo stato di polarizzazione di un fotone per effettuare comunicazione quantistica.

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_z & s_x - i s_y \\ s_x + i s_y & 1 - s_z \end{pmatrix}; \quad (141)$$

espressione della matrice densità in funzione dei parametri di Bloch.

L'ortonormalità tra i vettori sulla sfera di Bloch fornisce due vettori di tipo anti-parallelo.

Nel caso di stato puro si ha che $Tr\{\rho^2\} = 1$, ovvero $|s|^2 = 1$, la lunghezza di vettori di Bloch sulla sfera è unitaria.

Nel caso di stato non puro si ha che $Tr\{\rho^2\} < 1$, ovvero $|s|^2 < 1$, la lunghezza di vettori di Bloch sulla sfera è minore di uno, descrivendo l'equazione di una sfera.

Le rotazioni dei vettori sulla sfera di Bloch sono le uniche operazioni concesse e rappresentano le operazioni effettuate da un sistema quantistico sui qubit.

$$|t\rangle = U|s\rangle: \quad (142)$$

relazione tra lo stato finale e quello iniziale con l'applicazione di una matrice unitaria.

$$\rho_t = U\rho_s U^\dagger: \quad (143)$$

relazione tra la matrice densità del vettore di Bloch t (finale) e la matrice densità del vettore di Bloch s (iniziale), tramite l'applicazione dell'operatore unitario in forma normale ed hermitiana.

$$t = Rs: \quad (144)$$

trasformazione che lega i vettori sulla sfera di Bloch, tramite una matrice di rotazione.

$$R\sigma = U^\dagger \sigma U: \quad (145)$$

relazione tra la matrice di rotazione (3x3) e una matrice unitaria (2x2).

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos k & -e^{i\beta} \sin k \\ e^{-i\beta} \sin k & e^{-i\alpha} \cos k \end{pmatrix}. \quad (146)$$

espressione generica di una matrice unitaria, ove il determinante deve essere unitario, al fine di garantire la conservazione delle probabilità.

$$t_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 Tr\{U\sigma_k U^\dagger\} s_k = \sum_{k=1}^3 R_{jk} s_k: \quad (147)$$

relazione che lega le componenti t a quelle s.

In tale caso, bisogna calcolare gli elementi di rotazione che legano i coefficienti dello stato iniziale a quello finale. Per portare uno stato nella condizione iniziale bisogna effettuare una rotazione di 4π sulla sfera di Bloch, ovvero una rotazione di 2π nello spazio di Hilbert-Smith corrisponde ad una rotazione di 4π nello spazio reale (è come se ci fosse un doppio avvolgimento sulla sfera di Bloch).

$$U_z = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \text{ per } k = 0 \text{ e } \beta = 0 \Rightarrow R_z = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & 0 \\ -\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (148)$$

$$U_x = \begin{pmatrix} \cos k & -i \sin k \\ i \sin k & \cos k \end{pmatrix}, \text{ per } \alpha = 0 \text{ e } \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ 0 & -\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix} \quad (149)$$

$$U_y = \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix}, \text{ per } \alpha = 0 \text{ e } \beta = 0 \Rightarrow R_y = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & 0 & \sin(2\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(2\alpha) & 0 & \cos(2\alpha) \end{pmatrix} \quad (150)$$

$$U = e^{-\frac{i\varphi}{2}} |r_+\rangle\langle r_+| + e^{\frac{i\varphi}{2}} |r_-\rangle\langle r_-| = e^{-\frac{i\varphi}{2}} (r \cdot \sigma). \quad (151)$$

espressione della matrice unitaria rispetto ad un asse generico corrispondente ad una rotazione di un angolo φ sulla sfera di Bloch.

$$U = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) I - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) (r \cdot \sigma): \quad (152)$$

gli esponenti pari sono semplificati con la matrice identità assumendo che il modulo del vettore sulla sfera è unitario.

$$R\sigma = U^\dagger \sigma U \Rightarrow R = \cos(\varphi) \sigma + (1 - \cos(\varphi)) r(r \cdot \sigma) + \sin(\varphi) (rx\sigma) = \\ r(r \cdot \sigma) + \sin(\varphi) (rx\sigma) - \cos(\varphi) (rxrx\sigma) \quad (153)$$

Nell'espressione della matrice di rotazione si individuano le seguenti componenti che agiscono sul vettore s della sfera di Bloch, rispetto ad un asse di rotazione generico:

- (rxs) : componente tangenziale;
- $(rxrxs)$: componente centripeta;
- $r(r \cdot \sigma)$: componente che mi permette di mantenere il vettore sul piano.

$$\frac{ds}{d\varphi} = (rxs) : \text{equazione di moto in forma differenziale del qubit sulla sfera di Bloch.}$$

L'espressione di moto è ricavata considerando rotazioni molto piccole che definisce matematicamente le rotazioni dei qubit lungo un asse della sfera di Bloch. L'evoluzione di un sistema quantistico è deterministica e dipende dalla rotazione sulla sfera di Bloch. La misurazione di uno stato è di natura probabilistica e per individuare completamente la misurazione bisogna effettuare il processo di tomografia quantistica.

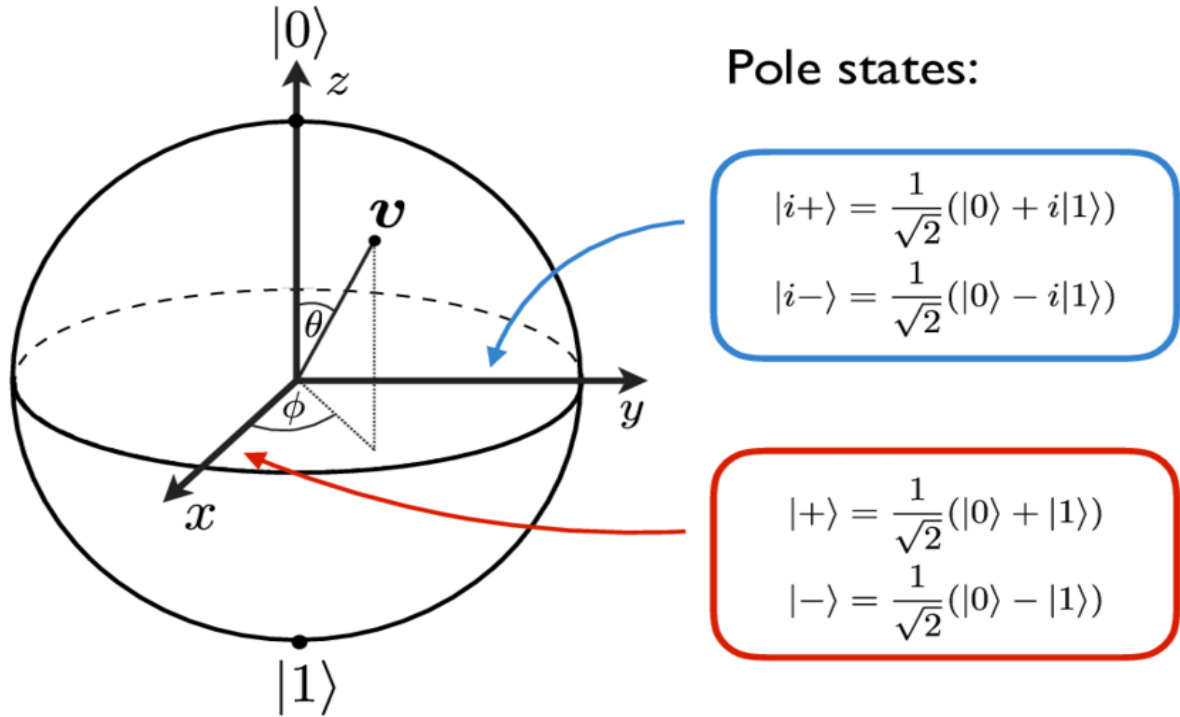


Figura 5: Rappresentazione della sfera di Bloch in cui si evidenziano i parametri trigonometrici per la definizione dello spinore in funzione degli angoli ϕ e θ . Definizione delle polarizzazioni diagonale (positiva e negativa) e circolare (sinistrorsa e destrorsa) come combinazione delle basi ortonormali corrispondenti alle polarizzazioni verticali ed orizzontali.

Particella immersa in un campo magnetico

L'evoluzione di uno stato è definita dall'equazione di Shrodinger nel caso di spazio di Hilbert o dall'equazione di Von Neumann nel caso di spazio di Hilbert-Smith.

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle: \quad (154)$$

equazione di Shrodinger per stati puri, che lega la variazione temporale dello stato quantistico al prodotto dell'Hamiltoniana del sistema e della matrice densità.

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho]: \quad (155)$$

equazione di Von Neumann per stati non puri, che lega la variazione temporale della matrice densità al commutatore dell'Hamiltoniana del sistema e della matrice densità.

Se si considera una particella con spin generico e si applica un campo magnetico costante, non dipendente dal tempo, sull'asse z non vi sono variazioni, mentre sull'asse x e y si ha una precessione, ottenuta da una rotazione del vettore sulla sfera di Bloch.

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{2eg}{4m_e c} n \times B: \quad (156)$$

equazione di moto del vettore di Bloch immerso in un campo magnetico (e = carica elettronica; m_e = massa elettrone; g = momento giromagnetico dell'elettrone).

Supposto che il campo magnetico abbia soltanto la componente lungo l'asse z ($B = B_0 \cdot z$), si trova il sistema di equazioni differenziali che descrive le variazioni temporali delle componenti degli assi cartesiani.

$$\frac{dn_x}{dt} = -2IB_0 n_y \quad (157)$$

$$\frac{dn_y}{dt} = 2IB_0 n_x \quad (158)$$

$$\frac{dn_z}{dt} = 0 \quad (159)$$

Supponendo che $n_y(0) = 0$, si ottiene:

$$n_x(t) = n_x(0)\cos(\omega t) \quad (160)$$

$$n_y(t) = n_x(0)\sin(\omega t) \quad (161)$$

$$n_z(t) = n_z(0) = \cos(t) \quad (162)$$

La direzione del campo B mi rappresenta l'asse di rotazione del qubit e, tramite fenomeni di decoerenza, si ottiene uno spiraleggiamento del vettore sino ad un completo allineamento dello spin con il campo magnetico applicato. Contestualmente al campo magnetico si applica un altro campo con direzione ortogonale e variabile nel tempo, al fine di poter controllare il valore dello spin della particella di tale sistema, effettuando l'approssimazione di onda rotante, ovvero trascurando i termini che cambiano molto velocemente a cui il sistema non sarà in grado di adattarsi con reattività.

$$|b(t)|^2 = \frac{\omega_1^2}{(2\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2} \left(1 - \cos\left(\sqrt{(2\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}\right)\right); \quad (163)$$

probabilità che lo spin, partendo dallo stato iniziale di orientamento verso l'alto, si trovi direzionato verso il basso.

Nell'equazione sopra descritta, le variabili del sistema sono le seguenti:

$\omega_0 = IB_0$: variabile connessa all'intensità del campo magnetico fisso;

$\omega_1 = IB_1$: variabile connessa all'intensità del campo magnetico variabile;

ω : pulsazione del campo magnetico variabile.

$$|b(t)|^2 = \frac{1 - \cos(\omega_1 t)}{2}, \text{ se } 2\omega_0 = \omega: \quad (164)$$

condizione di tuning. L'espressione consente di avere l'andamento del vettore di Bloch connesso al puntamento dello spin della particella, ove, dopo un certo intervallo temporale, si potrebbe avere la totale inversione ad esempio da una direzione a quella diametralmente opposta.

Sistema a due livelli – approssimazione semiclassica

Il sistema a due livelli, corrisponde ad un'altra modalità di rappresentazione di un qubit, in cui si considera l'evoluzione dello stato nel tempo, secondo le equazioni di Shrodinger o di Von Neumann (rappresentazione di Shrodinger), oppure il sistema rimane invariante e gli operatori variano nel tempo (rappresentazione di Heisenberg). I valori medi, sia considerando la rappresentazione di Shrodinger sia quella di Heisenberg, conducono allo stesso risultato. A tal proposito, l'Hamiltoniana del sistema risulta equivalente alla somma di due contributi, ovvero una Hamiltoniana non dipendente dal tempo (termine di evoluzione libera) e l'altra con dipendenza temporale (termine di interazione). In questo modo, risulta possibile isolare i termini dinamici, ovvero quelli che consentono al sistema di evolvere nel tempo, secondo una specifica legge fisica.

$$|\psi_f\rangle = U|\psi\rangle : \quad (165)$$

trasformazione unitaria che pone in relazione lo stato finale del sistema con quello di partenza.

$$H_f = i\hbar\dot{U}U^\dagger + UH U^\dagger : \quad (166)$$

relazione tra l'Hamiltoniana finale del sistema rispetto a quella iniziale e alla trasformazione che è stata applicata allo stato.

Il sistema a due livelli si compone principalmente di due livelli energetici, denominati stato eccitato e stato di ground, ove il differenziale energetico tra questi risulta pari a $\hbar(\omega_2 - \omega_1)$. Su tale sistema, agendo con un campo elettromagnetico di tipo ottico ($E(t) = E\cos(\omega t + \varphi)$), si verifica un'interazione che consente di innalzare il livello energetico di un elettrone a fronte dell'assorbimento di un fotone o, viceversa, il decadimento di un elettrone al livello ground comporta l'emissione di un fotone.

Si definiscono due operatori di scala, dati da una combinazione lineare di matrici di Pauli, i quali definiscono i passaggi energetici degli elettroni, in funzione delle seguenti espressioni:

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_+|1\rangle = |2\rangle \quad (167)$$

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_-|2\rangle = |1\rangle \quad (168)$$

σ_+ : associa a tale operatore di scala l'annichilazione di un fotone, ovvero l'operatore di distruzione a ;

σ_- : associa a tale operatore di scala la creazione di un fotone, ovvero l'operatore di creazione $a^\dagger$.

Si definisce:

$$U = e^{\frac{i}{\hbar}((\omega_2 + \omega_1 + \Delta - 2\delta)I + \omega\sigma_z)t} : \quad (169)$$

matrice di trasformazione del sistema a due livelli;

$$\Delta = \omega_2 - \omega_1 - \omega; \quad (170)$$

condizione di detuning, in cui si pone che la pulsazione del campo elettromagnetico sia uguale alla differenza energetica dei livelli energetici del sistemi.

Applicando l'approssimazione di onda rotante e definendo:

$$V = \frac{\Gamma E}{\hbar}; \quad (171)$$

dove Γ rappresenta il termine di accoppiamento di dipolo, si ricava l'espressione dell'Hamiltoniana del sistema:

$$H_I = i\hbar\dot{U}U^\dagger + UHUU^\dagger = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{V}{2} \\ -\frac{V}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}, \text{ ponendo } \delta(\text{variabile arbitraria}) = \frac{\Delta}{2} \quad (172)$$

Trasformando nel dominio Laplace si trova il sistema di equazioni per ricavare lo stato finale:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = H_I \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (173)$$

$$s\tilde{a} - 1 = -\frac{i\Delta}{2}\tilde{a} + \frac{iV}{2}\tilde{b}, \text{ con } a(0) = 1 \quad (174)$$

$$s\tilde{b} - 0 = \frac{iV}{2}\tilde{a} + \frac{i\Delta}{2}\tilde{b}, \text{ con } b(0) = 0 \quad (175)$$

Definendo:

$$\Omega_R = \Delta^2 + V^2; \quad (176)$$

espressione della frequenza di Rabi, si ottiene, a seguito di anti-trasformazione di Laplace e ponendo $\Delta=0$, che:

$$|a(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \quad (177)$$

$$|b(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)}{2}; \quad (178)$$

medesimo risultato ottenuto studiando l'evoluzione di stato dello spin di un elettrone immerso in un campo magnetico.

In condizione di de-tuning, in un sistema a due livelli ho il passaggio continuo dell'elettrone dal livello eccitato a quello di ground. L'interazione del sistema con il campo di vuoto introduce fenomeni di decoerenza, che causano il decadimento dell'elettrone sullo stato di ground (emissione spontanea).

Sistema a due livelli – campo elettromagnetico quantizzato

Si considera che il sistema a due livelli interagisca con un campo elettromagnetico quantizzato.

$$\widetilde{E}_t(k, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \widetilde{A}_t(k, t) = i\omega(A(k)e^{ikr-i\omega t} - A^*(k)e^{-ikr+i\omega t}) \quad (179)$$

$$E_t(r, t) = C(ae^{i(kr-\omega t)} - a^\dagger e^{-i(kr-\omega t)}), \quad (180)$$

$$\text{per } r = 0, t = 0 \Rightarrow E_t(r, t) = C(a - a^\dagger): \quad (181)$$

espressione del campo elettromagnetico quantizzato.

Il sistema può essere espresso secondo le Hamiltoniane di evoluzione libera (H_0) e di interazione (H_I).

$$H_0 = \frac{\hbar}{2}(\omega_2 - \omega_1)I + \frac{\hbar}{2}(\omega_2 - \omega_1)\sigma_z + \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right): \quad (182)$$

Hamiltoniana di evoluzione libera;

$$H_I = -i\hbar\lambda(\sigma_+ + \sigma_-)(a - a^\dagger): \quad (183)$$

Hamiltoniana di interazione.

Si definiscono le trasformazioni unitarie associate al sistema atomico in approssimazione semi-classica e del campo elettromagnetico quantizzato. Tali trasformazioni risultano disaccoppiate tra di loro.

$$U_A = e^{\frac{i}{2}((\omega_2 + \omega_1 + \Delta - 2\delta)I + \omega\sigma_z)t}, \quad (184)$$

con $\Delta = (\omega_2 - \omega_1 - \omega)$ e $\delta = \frac{\Delta}{2}$: trasformazione unitaria del sistema atomico in approssimazione semi-classica;

$$U_E = e^{i(a^\dagger a + \frac{1}{2})\omega t} = \sum_n e^{i(n + \frac{1}{2})\omega t} |n\rangle\langle n|: \quad (185)$$

trasformazione unitaria associata al campo elettromagnetico;

$$U = U_A U_E : \quad (186)$$

le trasformazioni unitarie dei due sotto-sistemi sono disaccoppiate.

Si ricavano le singole Hamiltoniane del sistema, ovvero quella relativa al campo elettromagnetico e quella del sistema atomico.

Relativamente al campo elettromagnetico si ottiene:

$$H_{IE} = i\hbar U_E U_E^\dagger + U_E H_E U_E^\dagger \quad (187)$$

$$i\hbar U_E U_E^\dagger = -\hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \quad (188)$$

$$U_E H_E U_E^\dagger = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - i\hbar\Lambda(\sigma_+ + \sigma_-)(U_E a U_E^\dagger - U_E a^\dagger U_E^\dagger) \quad (189)$$

$$U_E a U_E^\dagger = a e^{-i\omega t} \quad e U_E a^\dagger U_E^\dagger = a^\dagger e^{i\omega t} \quad (190)$$

$$H_{IE} = i\hbar\dot{U}_E U_E^\dagger + U_E H_E U_E^\dagger = -i\hbar\Lambda(\sigma_+ + \sigma_-)(a e^{-i\omega t} - a^\dagger e^{i\omega t}) \quad (191)$$

Relativamente al sistema atomico a due livelli si ottiene:

$$H_{IA} = i\hbar\dot{U}_A U_A^\dagger + U_A H_A U_A^\dagger \quad (192)$$

$$i\hbar\dot{U}_A U_A^\dagger = \hbar \begin{pmatrix} \omega_2 + \omega_1 + \omega & 0 \\ 0 & \omega_2 + \omega_1 - \omega \end{pmatrix} \quad (193)$$

$$U_A H_A U_A^\dagger = \begin{pmatrix} \hbar\omega_2 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_1 \end{pmatrix} - i\hbar\Lambda(U_A \sigma_+ U_A^\dagger + U_A \sigma_- U_A^\dagger)(a - a^\dagger) \quad (194)$$

$$U_A \sigma_+ U_A^\dagger = \sigma_+ e^{i\omega t} \quad e U_A \sigma_- U_A^\dagger = \sigma_- e^{-i\omega t} \quad (195)$$

$$H_{IE} = i\hbar\dot{U}_E U_E^\dagger + U_E H_E U_E^\dagger = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} - i\hbar\Lambda(\sigma_+ e^{i\omega t} + \sigma_- e^{-i\omega t})(a - a^\dagger) \quad (196)$$

In tale modo è possibile ricavare l'Hamiltoniana totale del sistema a due livelli con campo elettromagnetico quantizzato:

$$H_I = i\hbar\dot{U}U^\dagger + U H U^\dagger = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} - i\hbar\Lambda(\sigma_+ e^{i\omega t} + \sigma_- e^{-i\omega t})(a e^{-i\omega t} - a^\dagger e^{i\omega t}) \quad (197)$$

Dall'espressione trovata si ricavano i seguenti processi fisici:

- $\sigma_+ a$: a seguito dell'assorbimento di un fotone dal campo elettromagnetico, l'elettrone passa al livello energetico superiore del sistema a due livelli;
- $\sigma_- a^\dagger$: a seguito dell'emissione di un fotone, l'elettrone passa al livello energetico inferiore del sistema a due livelli;
- $\sigma_+ a^\dagger e^{i2\omega t}$ e $\sigma_- a e^{-i2\omega t}$: termini rapidamente oscillanti e fisicamente possibili in meccanica quantistica. Questi sono processi mediati da un andamento temporale di pulsazione 2ω , pertanto questi processi sono poco probabili.

$$H_I = \hbar\frac{\Delta}{2}\sigma_z - i\hbar\Lambda(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger): \quad (198)$$

Hamiltoniana in approssimazione di onda rotante.

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_n a_n |1\rangle |n_E\rangle: \quad (199)$$

stato iniziale del sistema a due livelli in interazione con un campo elettromagnetico caratterizzato da una specifica distribuzione di probabilità.

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_n C_{n,1}(t)|1\rangle|n\rangle + \sum_n C_{n,2}(t)|2\rangle|n\rangle: \quad (200)$$

espressione di uno stato generico.

Risolvendo l'equazione di Shrodinger, nel dominio di Laplace, si ottiene lo stato del sistema che è caratterizzato da un andamento armonico con un fattore di smorzamento dipendente dal tempo e dal termine di accoppiamento di dipolo (Λ). Pertanto, si ottengono dei revivals, in cui in funzione del tempo, si possono ottenere uno stato in sovrapposizione, eccitando il sistema a due livelli ad esempio con un laser (distribuzione di probabilità Poussoniana). Considerando un sistema a due livelli con un campo elettromagnetico quantizzato si ottiene una sovrapposizione di oscillazione che generano dei battimenti, fornendo una condizione di sovrapposizione di stati quantistici, sebbene i fenomeni di decoerenza inducono l'elettrone a decadere a livello ground. Alla luce di quanto descritto, nei sistemi quantistici è fondamentale considerare sia il tempo per effettuare le operazioni sui qubit, sia il tempo prima che il sistema decada.

Stati e operatori quantistici

I qubit, elementi di base dei sistemi quantistici, rappresentati da sistemi a due livelli o dal valore di spin, possono essere studiati nello spazio di Hilbert, il quale rappresenta uno spazio astratto e non reale.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle : \text{rappresentazione di qubit come stato puro} \quad (201)$$

Nel mondo quantistico si possono ottenere degli stati in sovrapposizione rispetto al caso classico, ove α e β rappresentano le ampiezze di probabilità (numeri complessi), tali che la somma dei moduli al quadrato sia corrispondente al valore unitario. Esclusivamente quando le ampiezze di probabilità sono uguali a 0 o 1, ci si può ricondurre alle casistiche di tipo classico.

Lo spazio di Hilbert è uno spazio matematico costituito dall'insieme di vettori (colonna), denominati ket, i quali ammettono i corrispondenti vettori (riga) duali (trasposti complessi coniugati), denominati bra.

Il prodotto interno nello spazio di Hilbert corrisponde ad un prodotto scalare, significando che si ottiene la proiezione del ket sul bra. Data la definizione di prodotto interno, è possibile trovare i valori delle ampiezze di probabilità di uno stato generico:

$\langle 0|\psi\rangle = \alpha$ e $\langle 1|\psi\rangle = \beta$: proiezione di $|\psi\rangle$ rispettivamente sulla base $|0\rangle$ e $|1\rangle$ (versori nello spazio) che consente di ricavare le relative ampiezze di probabilità associate alle basi, tramite la proprietà di normalità ed orto normalità delle stesse.

Il prodotto esterno nello spazio di Hilbert restituisce un proiettore $|0\rangle\langle 0| = \pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $|1\rangle\langle 1| = \pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a cui è associata una misurazione sul sistema quantistico. Pertanto, effettuare un prodotto esterno restituisce la proiezione del vettore di stato su una particolare base, moltiplicato per la direzione della base stessa:

$$|0\rangle\langle 0| \psi\rangle = \alpha |0\rangle: \quad (202)$$

oltre al valore dell'ampiezza di probabilità, il prodotto esterno sullo stato, restituisce anche il versore associato.

Relazione di chiusura: la somma di tutti i possibili proiettori dello spazio equivale al valore unitario $(\sum_x |x\rangle\langle x| = I)$.

Nel caso di qubit si lavora su uno spazio complesso 2x2, che consente di passare alla notazione spinoriale, ove il bra è rappresentato da un vettore riga a 2 elementi e il ket da un vettore colonna a 2 elementi.

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (203)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ vettore colonna} \quad (204)$$

$$\langle\psi| = (\alpha^* \quad \beta^*) \text{ vettore riga} \quad (205)$$

In generale, ai vettori saranno associati degli stati, mentre alle matrici degli operatori.

Al fine di mantenere la proprietà di normalizzazione di uno stato generico, bisogna che le matrici di trasformazione siano unitarie, ovvero il prodotto tra la matrice hermitiana e la matrice stessa sia corrispondente all'identità; in questo modo si conservano le probabilità. Quando si opera sui qubit si considerano degli operatori unitari che appartengono allo spazio delle matrici speciali (determinante unitario) 2x2 (spazio complesso 2x2).

Siccome tutti i fenomeni naturali sono caratterizzati da rumore, bisogna considerare lo spazio di Hilbert-Smith, il quale rappresenta uno spazio fisico, ove sono presenti le matrici densità.

Sfruttando la proprietà di chiusura è possibile esprimere una matrice (operatore) in forma generica, relativamente alle basi canoniche del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} \langle 0|A|0\rangle & \langle 0|A|1\rangle \\ \langle 1|A|0\rangle & \langle 1|A|1\rangle \end{pmatrix} \quad (206)$$

$$X = \sigma_x \Rightarrow \begin{pmatrix} \langle +|X|+\rangle & \langle +|X|-\rangle \\ \langle -|X|+\rangle & \langle -|X|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ in base } |+\rangle, |-\rangle: \quad (207)$$

X ammette auto valori 1 e -1 e auto vettori $|+\rangle, |-\rangle$.

$$Y = \sigma_y \Rightarrow \begin{pmatrix} \langle R|Y|R\rangle & \langle R|Y|L\rangle \\ \langle L|Y|R\rangle & \langle L|Y|L\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ in base } |R\rangle, |L\rangle: \quad (208)$$

Y ammette auto valori 1 e -1 e auto vettori $|R\rangle, |L\rangle$.

$$Z = \sigma_z \Rightarrow \begin{pmatrix} \langle 0|Z|0\rangle & \langle 0|Z|1\rangle \\ \langle 1|Z|0\rangle & \langle 1|Z|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ in base } |0\rangle, |1\rangle: \quad (209)$$

Z ammette auto valori 1 e -1 e auto vettori $|0\rangle, |1\rangle$.

Considerando un sistema di due qubit, bisogna effettuare un prodotto tensoriale tra le basi canoniche, che conduce alla creazione di quattro basi. In generale i vettori delle basi di un sistema a N qubit sono 2^N .

$$|0\rangle|0\rangle = |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (210)$$

$$|0\rangle|1\rangle = |01\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (211)$$

$$|1\rangle|0\rangle = |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (212)$$

$$|1\rangle|1\rangle = |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (213)$$

Uno stato è detto separabile se ciascuna delle componenti appartiene ai relativi sotto-spazi che lo compongono.

$$X \otimes X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (X \otimes X)|0\rangle|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X|0\rangle \otimes X|0\rangle =$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle \quad (214)$$

$$(X \otimes X)|0\rangle|0\rangle = X|0\rangle \otimes X|0\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle : \text{stati separabili.} \quad (215)$$

Entanglement e porte logiche quantistiche

Stati entangled

Uno stato è detto entangled quando non è separabile. Questa è una definizione puramente matematica e basata su una negazione.

Per studiare gli stati entangled, si deve definire il control-not (C-NOT), che rappresenta una porta logica quantistica fondamentale. Questo gate è costituito essenzialmente da due ingressi e due uscite, in cui i bit di ingresso sono denominati di controllo e di target. Si riporta di seguito la rappresentazione matriciale della porta C-NOT con la rispettiva tabella di verità.

$$C - NOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc} C_{in} & T_{in} & T_{out} \\ |0\rangle & |0\rangle & |0\rangle \\ |0\rangle & |1\rangle & |1\rangle \\ |1\rangle & |0\rangle & |1\rangle \\ |1\rangle & |1\rangle & |0\rangle \end{array} \quad (216)$$

Se il bit di controllo vale zero, il bit di target è inalterato, altrimenti lo stesso è in operazione xor con il bit di target.

$$\begin{array}{ccc} |0\rangle & [H] & \bullet \quad |out_1\rangle \\ |0\rangle & [I] & \oplus \quad |out_2\rangle \end{array}$$

$[H]$: matrice di Hadamard;

$[I]$: matrice identità.

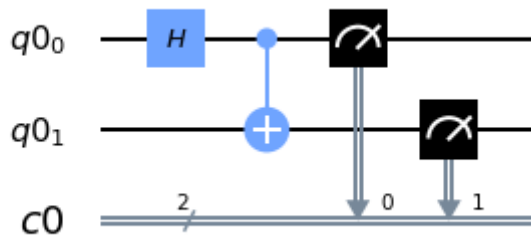


Figura 6: Rappresentazione del circuito quantistico che genera in uscita uno stato entangled.

Le porte logiche quantistiche fondamentali sono state create e testate tramite software Qiskit, ovvero un open source software development kit (SDK) per sviluppare circuiti ed algoritmi adatti ai calcolatori quantistici.

In cascata alla matrice di Hadamard e identità pongo una porta C-NOT. Mettendo in ingresso a questo sistema una coppia di qubit (stati separabili), si ottengono degli stati entangled (stati di Bell).

$$|0\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi^+ \quad (217)$$

$$|0\rangle|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Psi^+ \quad (218)$$

$$|1\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \Phi^- \quad (219)$$

$$|1\rangle|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Psi^- \quad (220)$$

Le disuguaglianze di Bell consentono di risolvere problemi di communication complexity, ovvero comunicazioni in cui non avviene il completo scambio dei dati.

In tale contesto è importante citare il paradosso EPR (Einstein-Podolsky-Rosen): paradosso su un processo di misura, in cui, tramite gli stati entangled, vengono violati i principi di realismo e località. Per dimostrare il paradosso EPR sono state introdotte le disuguaglianze di Bell. Lo stato entangled non soddisfa il principio di realismo, in quanto non è possibile capire lo stato di un sistema quantistico fintantoché non lo si misuri e non soddisfa il principio di località, ovvero la misura di uno stato potrebbe influenzarne un altro. Quando si effettua una misura su uno stato entangled, al fine di ottenere la correlazione insita nei fotoni ad esempio, c'è bisogno che ad esempio Alice e Bob si mettano d'accordo su come orientare il sistema di misura, in quanto il superamento della velocità della luce non è in alcun modo possibile in nessuna casistica.

Gli stati entangled non sono separabili, infatti essi non sono stati prodotto.

Relativamente alla computation complexity, vi sono benefici nell'impiego di stati entangled rispetto a paradigmi classici.

$$x \text{ and } y = a \oplus b \Rightarrow \text{funzione obiettivo} \quad (221)$$

$$P_{\text{successo}}(\text{classico}) = \frac{3}{4}: \text{ se Alice e Bob pongono } a \text{ e } b \text{ uguali a zero} \quad (222)$$

$$P_{\text{successo}}(\text{quantistico}) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) > \frac{3}{4}: \quad (223)$$

se Alice e Bob scelgono di condividere uno stato entangled (Φ^+), riescono a superare quanto ottenibile con qualsiasi strategia di tipo classico.

La condizione di superamento dei limiti classici nel caso di problemi di communication complexity non si ottiene con tutti gli stati quantistici, ma soltanto con particolari stati di Bell (e.g. ϕ^+). Talvolta la meccanica quantistica a volte non consente nemmeno di raggiungere il caso classico. Nel momento in cui il numero di variabili aumenta, il caso quantistico tenderà sempre più a quello classico.

Tramite la correlazione insita nello stato entangled, risulta possibile violare alcuni risultati ottenuti nel caso classico. In tale contesto, si potrebbe analizzare un problema, scriverlo in maniera particolare e scegliere uno stato entangled che mi permetta di massimizzare il problema stesso. La meccanica quantistica nello scambio delle chiavi serve ad avere un risultato maggiore rispetto a quello classico. L'utilità dello stato entangled nello scambio chiavi risiede nella sua elevata entropia con massima correlazione.

Una delle modalità per creare stati entangled avviene tramite l'impiego di un cristallo non lineare (e.g. BBO), ove come descritto precedentemente, durante il PDC si mantiene la conservazione dell'energia e del momento. Nel caso di phase matching di tipo due, si ottiene una coppia di fotoni con polarizzazione ortogonale tra di loro. Il cristallo, oltre ad essere non lineare, ha anche la proprietà di bi-rifrangenza, in cui il vettore dell'energia differisce dal vettore k di propagazione, dando origine al cosiddetto walk-off trasverso, a cui è soggetto il fotone a polarizzazione verticale. In aggiunta, presentando il fotone a polarizzazione verticale una velocità di gruppo maggiore rispetto a quello orizzontale, si ottiene una non correlazione temporale. Scegliendo come segnale di pompa un laser impulsato rispetto ad uno funzionante in continua, si ricava un clock intrinseco che consente di discernere quando i fotoni down convertiti sono stati potenzialmente emessi. Nel dominio della frequenza, un segnale impulsato mi fornisce un segnale sinc nello spettro e si impiega un interferometro particolare, costituito da un trombone, per consentire anche di ottenere una perfetta correlazione temporale tra i fotoni.

Gli stati quantistici, a seconda delle caratteristiche delle matrici densità, possono essere collocati all'interno di un grafico bidimensionale, ove l'asse delle ascisse è la concurrency, mentre quello delle ordinate è l'entropia. La concurrency descrive il grado di entanglement, inoltre, quando gli stati non sono puri, si dovrà prendere in considerazione l'entropia (in tal caso entropia lineare S_L). All'interno della matrice densità, i termini diagonali costituiscono i termini di popolazione, mentre quelli anti-diagonali sono i termini di coerenza.

$Tr\{\rho^2\} = 1$: condizione di stato puro (esprimibile in termini di spazio di Hilbert).

$$se |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr\{\rho^2\} = 1 : \text{stato puro} \quad (224)$$

$$se \ |\psi_{mx}\rangle \Rightarrow \rho_{mx} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Tr\{\rho_{mx}^2\} = \frac{1}{2} \leq 1: \text{ stato massimamente misto (stato più rumoroso)} \quad (225)$$

$$S_L = 2(1 - Tr\{\rho^2\}): \text{calcolo dell'entropia lineare} \quad (226)$$

$$S_L = \frac{d}{d-1}(1 - Tr\{\rho^2\}): \text{calcolo dell'entropia lineare per uno stato di Hilbert Smith generico avente dimensione } d \quad (227)$$

$$S_L = 0 \text{ in caso di stato puro} \quad (228)$$

$$S_L = 1 \text{ in caso di stato massimamente misto} \quad (229)$$

Nel caso di uno stato quantistico generico, espresso in forma spinoriale con le variabili trigonometriche della sfera di Bloch, si potrebbe ricavare una formula in modo tale da ricavare il corrispettivo stato ortonormale, ovvero in cui il prodotto interno si annulli. Questa rappresenta esclusivamente una trasformazione matematica e non di tipo fisico.

$$\text{Dato } |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_y |\psi^*\rangle = |\phi\rangle \Rightarrow \langle \phi | \psi \rangle = 0, \quad (230)$$

ovvero ϕ e ψ sono ortonormali.

Nel caso dello spazio di Hilbert-Smith:

$$\text{Dato } \rho \Rightarrow \rho^* \Rightarrow \tilde{\rho} = \sigma_y \rho^* \sigma_y \Rightarrow Tr\{\rho \tilde{\rho}\} = 0 \quad (231)$$

Applico il medesimo ragionamento ad un sistema di due qubit:

$$\begin{aligned} \text{Dato } \rho &= \rho_1 \otimes \rho_2 \Rightarrow (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) = (\sigma_y \otimes \sigma_y) (\rho_1^* \otimes \rho_2^*) + (\sigma_y \otimes \sigma_y) = \\ &(\sigma_y \rho_1^* \sigma_y) \otimes (\sigma_y \rho_2^* \sigma_y) = \tilde{\rho}_1 \otimes \tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (232)$$

Se lo stato è separabile giace su un segmento poiché la concurrency sarà sempre nulla.

Dato lo stato entangled:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2) \quad (233)$$

Si ottiene:

$$|\phi^+\rangle\langle\phi^+| = \rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \rho^* \quad (234)$$

$$(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) = \tilde{\rho} = \rho \Rightarrow \rho \tilde{\rho} = \rho^2 = \rho \quad (235)$$

Da qui si ricavano gli autovalori della matrice:

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0 \text{ e } \lambda_4 = 1 \quad (236)$$

La concurrency dello stato ϕ^+ è pari a 1, mentre l'entropia lineare è nulla.

Nel grafico cartesiano entropia-concurrency, tutti gli stati entangled si troveranno all'interno di una mezza luna, con un massimo ottenibile di entropia pari a 8/9. A completare la restante parte dell'area del grafico considerando valori di entropia maggiore di 8/9, sino ad una concurrency di 1, si troveranno gli stati MEMS, ovvero stati misti massimamente entangled.

Riassumendo, gli stati separabili consentono di apportare ragionamenti di tipo locale sul sistema quantistico.

Nel caso di uno stato entangled, ad esempio generato da un cristallo non lineare BBO, in cui si effettuino misure separate sui due rami dove sono presenti i singoli fotoni, per ogni ramo si potranno effettuare misurazioni concernenti la matrice densità ridotta. Ovvero le misurazioni effettuate sullo specifico ramo si riferiscono al relativo sotto-spazio in cui si ha accesso. In generale, ogni volta che misuro un oggetto, bisogna considerare che lo stesso è legato tensorialmente all'intero universo. Pertanto, per conoscere totalmente l'oggetto sottoposto a misurazione, si dovrebbe conoscere l'intero universo, che rappresenta qualcosa di impossibile.

A tal proposito, bisogna considerare che la misurazione corrisponde ad un'operazione di proiezione, in cui si ricava la traccia della matrice densità rispetto al proiettore. Tale concetto si potrebbe estendere nel caso più generico di una misura generica, ove si considera l'operatore di misura POVM (Positive-Operator Valued Measure) Λ_j , in prodotto tensoriale con la matrice identità del sottospazio in considerazione, moltiplicato per la matrice densità totale del sistema ed applicandone la traccia.

$$Tr\{(\Lambda_j \otimes I) \rho_{AB}\} \quad (237)$$

$$\sum_{i,j} \langle i | \langle j | (\Lambda_j \otimes I) \rho_{AB} | j \rangle | i \rangle : \quad (238)$$

traccia considerando che ρ_{AB} è un sistema più complesso.

$$\sum_{i,j} \langle i| \langle j| (\Lambda_j \otimes I) \rho_{AB} |j\rangle |i\rangle = \sum_i \langle i| \Lambda_j \sum_j (I_A \otimes \langle j|) \rho_{AB} (I_A \otimes |j\rangle) |i\rangle = \text{Tr}_A \{ \Lambda_j \rho_A \}, \quad (239)$$

con $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$.

Alice fa una traccia rispetto ai gradi di libertà di Bob sulla matrice densità completa. Se Alice e Bob fanno le misure sulle singole particelle e non dialogano tra di loro, non vedrebbero uno stato polarizzato, bensì uno stato non realistico (massimamente misto). Le misurazioni che consentono di individuare lo stato del sistema saranno misure congiunte, in quanto la misura parziale ne determina una nulla.

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (240)$$

ρ_{AB} rappresenta l'intero sistema. Ma Alice e Bob non vedono l'intero sistema nella sua completezza, bensì una sotto-parte di questo, avendo accesso ad un unico fotone.

$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$: spazio a cui Alice può accedere, ovvero lo stato di polarizzazione del fotone che arriva ad Alice (matrice densità ridotta).

Per le proprietà di circolarità della traccia e per la proprietà di ortogonalità delle basi dello spazio di Hilbert-Smith, si ottiene la seguente regola per ricavare la matrice densità ridotta da quella completa. Partendo da una matrice 4x4, bisogna:

- dividere la matrice in 4 sotto-matrici;
- sommare gli elementi sulla diagonale principale delle rispettive sotto-matrici.

Scegliendo angoli uguali nella misurazione dei fasci di fotoni ottenuti all'uscita del cristallo non lineare, si ottiene quale unico grado di libertà esclusivamente la polarizzazione.

$$\rho_A = \text{Tr}_B \{ \rho_{AB} \} = \text{Tr} \{ (\sigma_A \otimes I) \rho_{AB} \} : \text{misura effettuata da Alice};$$

$$\rho_B = \text{Tr}_A \{ \rho_{AB} \} = \text{Tr} \{ (I \otimes \sigma_B) \rho_{AB} \} : \text{misura effettuata da Bob}.$$

In caso di stato separabile, si ottiene che le misure di Alice e Bob sono indipendenti dall'altro osservatore.

Adesso, si prenda in considerazione uno stato entangled (singoletto), ottenuto da un cristallo non lineare con phase matching di tipo II (polarizzazione “o” – ordinaria; polarizzazione “e” – straordinaria).

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|o\rangle_1 |e\rangle_2 - |e\rangle_1 |o\rangle_2) \quad (241)$$

$$|\psi^-\rangle\langle\psi^-| = \rho_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_A = \rho_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \quad (242)$$

La matrice densità ridotta rappresenta una sorta di miscela statistica di stati puri, come se la sorgente preparasse uno stato orizzontale o verticale con probabilità pari a 0.5. Pertanto, quando si effettuerà una differenza dei conteggi, si troverà sempre un valore nullo (e.g. $\frac{N_H - N_V}{N_H + N_V} = 0$), come se i vettori sulla sfera di Bloch avessero tutti un modulo nullo e lo stato non presentasse alcuna polarizzazione. Alice e Bob, effettuando misurazioni indipendenti, sulla matrice densità ridotta, troveranno erroneamente che lo stato non ha alcuna polarizzazione.

$$\begin{aligned} Tr\{(A_H \otimes I)\rho_{AB}\} &= Tr\left\{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \\ Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} &= 0.5: \end{aligned} \quad (243)$$

Se Alice effettua una misurazione indipendente sulla polarizzazione orizzontale, trova una probabilità pari a 0.5. Considerando il caso in cui Bob non ci sia, rappresentandolo con una matrice identità. La probabilità trovata equivale ad un valore medio, corrispondente ad una proiezione della componente orizzontale verso Alice.

$$\begin{aligned} Tr\{(A_H \otimes B_V)\rho_{AB}\} &= Tr\left\{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \\ Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} &= 0.5: \end{aligned} \quad (244)$$

Se Alice e Bob effettuano una misurazione congiunta, ove Alice misura in polarizzazione orizzontale e Bob in polarizzazione verticale, si trova una probabilità pari a 0.5. Questo rappresenta una proiezione della componente orizzontale verso Alice e una proiezione della componente verticale verso Bob, che si verifica con valor medio di probabilità pari a 0.5. Se Alice e Bob scelgono una particolare proiezione e si confrontano, si otterrà sempre il valore 0.5.

$$Tr\{(A_H \otimes B_H)\rho_{AB}\} = Tr\left\{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0: \quad (245)$$

Se Alice e Bob scelgono la stessa direzione di misurazione, misurando congiuntamente lungo la stessa polarizzazione, si otterrà una probabilità nulla che scatti il detector orizzontale.

Riassumendo quanto presentato matematicamente, relativamente allo stato $|\psi^\pm\rangle$, si ottengono le seguenti assunzioni, facendo un parallelismo con il lancio di una moneta e i relativi risultati di ottenere testa o croce:

- se Alice e Bob non si confrontano e fanno misurazioni indipendenti, si troveranno metà dei casi di ottenere testa o croce (miscela statistica);
- se Alice e Bob scelgono basi differenti, effettuano misurazioni congiunte e si confrontano, vedranno che se uno riceve testa, l'altro riceverà croce e viceversa (classicamente la probabilità di avere TC o CT risulta pari a 0.25, rispetto a quanto trovato con l'impiego di uno stato entangled, ovvero 0.5);
- se Alice e Bob sceglieranno la stessa base (medesima direzione di polarizzazione – medesimo proiettore), troveranno zero conteggi sui relativi detector.

Gli stessi ragionamenti si effettuano anche qualora scegliessi il seguente stato entangled:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|o\rangle_1|o\rangle_2 + |e\rangle_1|e\rangle_2) \quad (246)$$

$$|\phi^+\rangle\langle\phi^+| = \rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_A = \rho_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \quad (247)$$

$$Tr\{(A_H \otimes I)\rho_{AB}\} = Tr\left\{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\} =$$

$$Tr\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0.5 \quad (248)$$

$$\begin{aligned}
Tr\{(A_H \otimes B_H)\rho_{AB}\} &= Tr\left\{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\} = \\
Tr\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} &= 0.5
\end{aligned} \tag{249}$$

$$\begin{aligned}
Tr\{(A_H \otimes B_V)\rho_{AB}\} &= Tr\left\{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\} = \\
Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} &= 0
\end{aligned} \tag{250}$$

Riassumendo quanto presentato matematicamente, relativamente allo stato $|\phi^\pm\rangle$, si ottengono le seguenti assunzioni, facendo un parallelismo con una moneta e i relativi risultati di ottenere testa o croce:

- se Alice e Bob non si confrontano e fanno misurazioni indipendenti, si troveranno metà dei casi di ottenere testa o croce (miscela statistica);
- se Alice e Bob, scelgono basi uguali, effettuano misurazioni congiunte e si confrontano, vedranno che se uno riceve testa, l'altro riceverà croce e viceversa (classicamente la probabilità di avere TC o CT risulta pari a 0.25, rispetto a quanto trovato con l'impiego di uno stato entangled, ovvero 0.5);
- se Alice e Bob sceglieranno la basi differenti, troveranno zero conteggi sui relativi detector.

Le precedenti assunzioni sono in contrasto rispetto alla modalità di misurazione, ovvero indipendente o congiunta. Alice non è in grado di capire quale è la polarizzazione emessa dallo stato quantistico, ovvero non esiste più l'elemento di realtà oggettiva. In questo caso, la polarizzazione si viene a creare all'atto stesso della misurazione. In fase sorgente ho una matrice densità con massima entropia, oggetto con nessun contributo informativo. Nel momento in cui si mettono insieme gli elementi informativi, si associa una polarizzazione. In questo modo, si crea una stringa di bit anti-correlata, in cui si crea una chiave crittografica in quanto la probabilità è 0.5 ed ogni misura è indipendente dalla precedente. Questo avviene se Alice e Bob concordano prima in

che modo orientare i beam splitter nel sistema di misurazione. Scegliendo un angolo randomico da parte di Alice, il fotone misurato da Bob sarà ortogonale rispetto a quello di Alice, qualunque sia l'angolo scelto (fra 0° e 360° ho infinite rotazioni).

Gli stati entangled permetterebbero di generare stringhe casuali di bit, perfettamente correlati (o anti-correlati) che possono trovarsi in due posti distinti, risolvendo il problema di distribuzione della chiave.

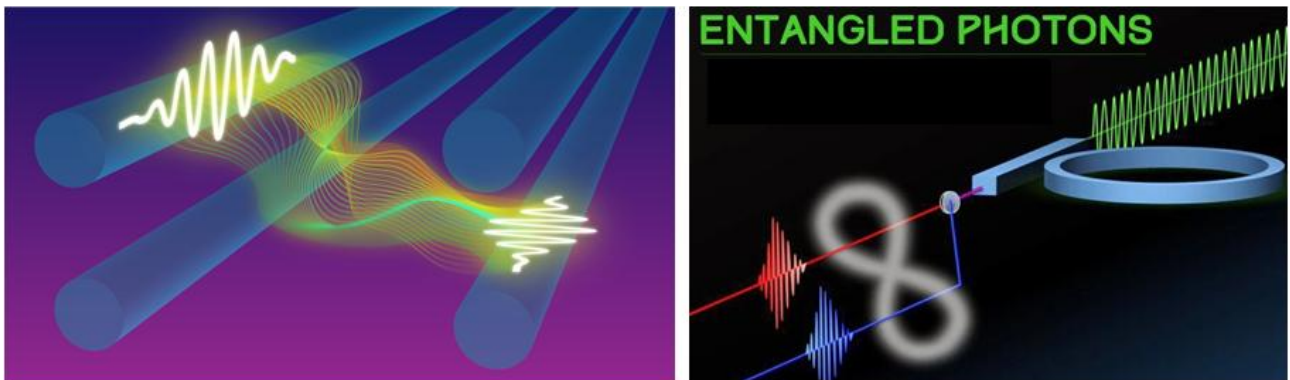


Figura 7: Rappresentazioni astratte del entanglement tra due particelle.

Porte logiche reversibili

Per realizzare un circuito quantistico bisogna considerare delle porte logiche con specifiche caratteristiche. Le linee del circuito rappresenteranno graficamente l'evoluzione di un qubit. Le porte quantistiche devono essere unitarie, in quanto le trasformazioni da effettuare sul qubit devono consentire la conservazione delle probabilità. Talune trasformazioni possono agire o localmente sul singolo qubit o non localmente, come nel caso di un CNOT (controlled NOT). L'esigenza di lavorare con i qubit nasce dal fatto che le trasformazioni possono essere unitarie agendo non solo da sinistra a destra, ma anche nel verso opposto, consentendo di ricostruire lo stato iniziale del sistema. Nel caso di sistema classico si hanno porte logiche anziché porte unitarie. Ad esempio la AND e NAND, nella maggior parte delle casistiche sulla tabella della verità, distruggono l'informazione. La distruzione dell'informazione equivale ad una distruzione del sistema, ove per ogni bit distrutto si quantifica in $k_B \ln 2$, dove $k_B = 1.380649 \times 10^{-23} J K^{-1}$ rappresenta la costante di Boltzmann. Anche supponendo di progettare un sistema impiegando cristalli puri, la distruzione dell'informazione conduce ad un aumento di temperatura, per effetto Joule.

Nel caso di sistema quantistico, l'evoluzione unitaria consentirebbe di tornare agli stati iniziali, minimizzando pertanto gli effetti dissipativi. A tal proposito, in generale, risulta fondamentale:

1. individuare una porta logica universale;
2. avere una condizione di reversibilità.

Per avere una porta logica sia universale che reversibile bisogna considerare il TOFFOLI GATE, avente la seguente rappresentazione:

$$Toffoli\ Gate = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (251)$$

Il toffoli gate (anche detto control control NOT) ha due bit di controllo (a, b) e uno di target (c), in cui si ottiene in uscita che $c \oplus (a \cdot b)$, ovvero il valore di c viene flippato solo nel caso in cui sia a che b sono unitari. Il toffoli gate rappresenta una porta logica reversibile. Se il bit di target è zero si avrà una AND ma reversibile.

Nel caso quantistico, il CNOT risulta essere la porta universale (porta a due qubit), rispetto al caso classico in cui lo è il TOFFOLI GATE (porta a tre bit).

Inputs			Outputs		
a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

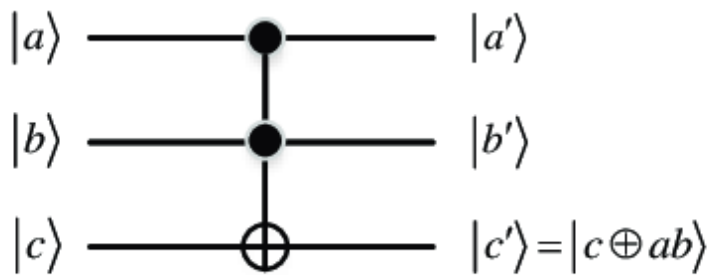


Figura 8: Rappresentazione schematica del Toffoli Gate e relativa tabella delle verità.

Considerando un CNOT, se il qubit di controllo è $|0\rangle$ allora lo stato presente sul target è invariato, mentre se il qubit di controllo è $|1\rangle$ allora lo stato presente sul target è invertito. È importante considerare anche stati in sovrapposizione $\frac{(|0\rangle+|1\rangle)}{\sqrt{2}}$ per comprendere che tipo di operazioni si possono effettuare con un sistema quantistico. Il CNOT introduce correlazioni tra gli ingressi.

Ponendo una porta di Hadamard sulla linea del sistema del qubit di controllo e in cascata si pone un CNOT, si ottiene un cosiddetto entanglatore, ovvero un sistema in grado di ottenere uno stato entangled, dati due stati quantistici in ingresso. L'operatore di Hadamard restituisce in uscita uno

stato in sovrapposizione. Da un punto di vista matematico, il sistema descritto si risolve come segue:

$$\text{stato di ingresso} = |0\rangle|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (252)$$

$$\begin{aligned} \text{primo stadio} &= (H \otimes I)|0\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \end{aligned} \quad (253)$$

Dall'espressione ottenuta considerando il primo stadio del sistema entanglante è possibile affermare che l'operatore di Hadamard agisce in modo locale sul primo qubit in ingresso al sistema (trasformazione locale), ovvero, sino al primo stadio il sistema può essere considerato separabile. Successivamente si considera anche il secondo stadio, ovvero il CNOT in cascata, ottenendo:

$$\text{secondo stadio} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) =$$

$$|\phi^+\rangle \Rightarrow \text{stato di Bell} \quad (254)$$

Con l'introduzione del CNOT al secondo stadio si ottiene uno dei 4 stati di Bell in uscita, ovvero una trasformazione non locale. La non località implica che il sistema non è più separabile, cioè, secondo la definizione, in uscita si ottiene uno stato entangled.

In generale, considerando il sistema sopra descritto è possibile, con una specifica combinazione dei qubit di ingresso, ottenere i 4 stati di Bell.

$$|00\rangle \Rightarrow |\phi^+\rangle \quad (255)$$

$$|01\rangle \Rightarrow |\psi^+\rangle \quad (256)$$

$$|10\rangle \Rightarrow |\phi^-\rangle \quad (257)$$

$$|11\rangle \Rightarrow |\psi^-\rangle \quad (258)$$

A livello pratico risulta molto complesso realizzare il primo stadio, ovvero $(H \otimes I)$, pertanto si è soliti implementare $(I \otimes H)$ con due porte SWAP in ingresso ed in uscita, così da ricondursi nuovamente all'operazione voluta:

$$(H \otimes I) = (SWAP (I \otimes H) SWAP) \quad (259)$$

La porta di SWAP è definita dal seguente operatore matriciale:

$$SWAP \ GATE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (260)$$

ottenuta scambiando la seconda e la terza linea del sistema lasciando invariati il primo e il quarto qubit, come descritto nelle associazioni seguenti tra qubit di ingresso e di uscita:

$$|00\rangle \Rightarrow |00\rangle \quad (261)$$

$$|01\rangle \Rightarrow |10\rangle \quad (262)$$

$$|10\rangle \Rightarrow |01\rangle \quad (263)$$

$$|11\rangle \Rightarrow |11\rangle. \quad (264)$$

La porta di Hadamard si realizza con un Mach Zehnder opportunamente configurato. Mentre il CNOT corrisponde ad uno scambio tra il terzo e il quarto qubit. In questo modo si è realizzato un sistema quantistico che è reversibile, ove percorrendo il circuito da sinistra a destra si ottengono stati entangled (entanglato), mentre nel verso opposto è possibile effettuare una misura di Bell e di discriminare i 4 stati di Bell tramite il valore dei qubit ottenuti in ingresso.

Quanto descritto introduce un concetto fondamentale dell'informazione quantistica basata su stati entangled, ovvero il teletrasporto quantistico (quantum teleportation). Con la suddetta forma di teletrasporto si trasferisce informazione e non materia. Alice vuole trasferire l'informazione contenuta nello stato $|\phi\rangle$, senza inviare lo stesso, ma esclusivamente inviando a Bob un'informazione su bit classici a seguito di una misura di Bell. Tale sistema si basa sull'impiego di qubit di ancilla (che non contengono alcuna informazione ma servono esclusivamente per ricostruire lo stato che si vuole trasferire), i quali costituiscono l'ingresso di un sistema entanglato avente come uscita $|\phi^+\rangle$, con in cascata una misura di Bell effettuata sul fotone che si desidera teletrasportare $|\phi\rangle$ ed un qubit dello stato entangled $|\phi^+\rangle$. Esprimendo $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, ovvero come combinazione lineare delle basi fondamentali, l'intero sistema funziona secondo le seguenti trasformazioni:

$$|\phi\rangle|\phi^+\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |011\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |100\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |111\rangle \quad (265)$$

A questo punto si isola l'ultimo qubit che viene trasferito verso Bob ed esprimendo in funzione degli stati di Bell:

$$\frac{1}{2}|\phi^+\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \frac{1}{2}|\psi^+\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + \frac{1}{2}|\phi^-\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) - \frac{1}{2}|\psi^-\rangle(\beta|0\rangle - \alpha|1\rangle) \quad (266)$$

Quindi dalla misura di Bell si potrebbero avere le seguenti casistiche:

- se uscita è $|\phi^+\rangle$, Alice manderà a Bob i bit 00, a cui non è associata alcuna trasformazione;
- se uscita è $|\psi^+\rangle$, Alice manderà a Bob i bit 01, a cui è associata la trasformazione $X (\sigma_x)$;
- se uscita è $|\phi^-\rangle$, Alice manderà a Bob i bit 10, a cui è associata la trasformazione $Z (\sigma_z)$;
- se uscita è $|\psi^-\rangle$, Alice manderà a Bob i bit 11, a cui è associata la trasformazione $XZ (\sigma_x\sigma_z)$.

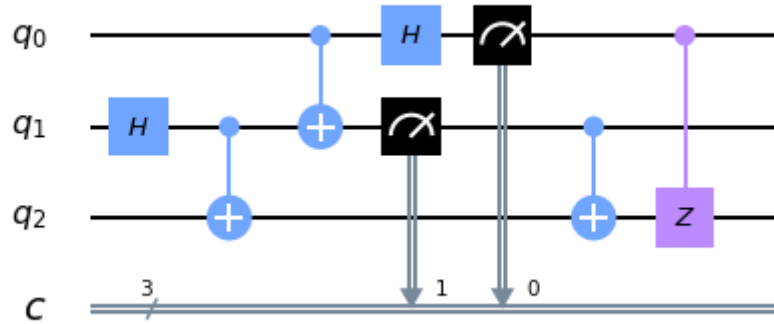


Figura 9: Circuito che realizza il teletrasporto quantistico.

Il teletrasporto quantistico consiste nel trasferimento informativo contenuto in uno stato, a cui si associano due bit classici per ogni qubit da teleportare ed una trasformazione da eseguire in fase di ricezione.

Effettuando una analisi generica su quanto descritto nel sistema entanglatore, è possibile comprendere in che maniera costruire le matrici associate alle porte quantistiche. Per ottenere entanglement la matrice avrà la forma: $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, ove con U si indica una matrice unitaria di rotazione. Si potrebbe anche costruire un CNOT ove il qubit di controllo per il flip del target sia $|0\rangle$ (CNOT[0]), anziché $|1\rangle$ (CNOT[1]), come precedentemente descritto. Oppure, si potrebbe descrivere con notazione matriciale un CNOT[1], in cui il qubit di controllo e di target sono invertiti (CNOT_[1]).

$$\text{CNOT}[1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{matrix} \quad (267)$$

$$\text{CNOT}[0] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{matrix} \quad (268)$$

$$\text{CNOT}_{[1]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{matrix} \quad (269)$$

In questo modo, seguendo l'evoluzione di ogni qubit, ci si può facilmente ricondurre alla descrizione matriciale di altre casistiche in cui è possibile impiegare il CNOT in differenti modalità (nel corso della seguente trattazione quando si indicherà il CNOT si farà riferimento al CNOT[1]). Il primo esempio di CNOT è stato il beam splitter, ma si possono avere anche CNOT multi-rail, come quello precedentemente descritto.

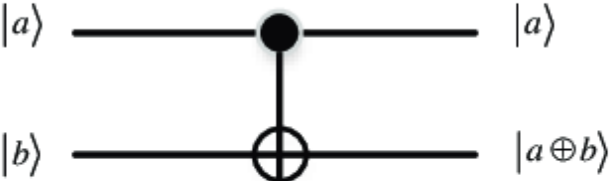
$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$


Figura 10: Rappresentazione matriciale e rappresentazione circuitale del CNOT.

Quando si costruisce un calcolatore quantistico basato su porte logiche è importante comprendere la probabilità di funzionamento dei singoli dispositivi e considerare che implementando una cascata di N porte, la probabilità di funzionamento totale del sistema è funzione della potenza n -esima (decremento esponenziale). La progettazione di un sistema computazionale quantistico è basato sul calcolatore KLM (Knill Laflamme Melburn), il quale è stato pensato per essere scalabile. La definizione di sistema scalabile implica che l'errore non deve crescere con il numero di fotoni impiegati e che le risorse non devono crescere esponenzialmente con il numero di fotoni. Il calcolatore KLM, in linea teorica, si fonda su:

- sorgenti a singolo fotone: non si riesce ad avere idealmente una photon gun, ovvero controllare deterministicamente quando il fotone viene emesso. Inoltre, nel caso di molteplici photon gun si dovrebbero generare fotoni nello stesso istante di tempo e con la medesima informazione spettrale;
- aumento esponenziale del numero di detector: bisogna inserire i detector su tutti i rami finali al fine di far fronte statisticamente a tutte le possibili probabilità;
- idealità dei circuiti: nella realtà i circuiti impiegati non sono ideali e nel caso di sistema a molteplici qubit l'errore non è lineare bensì aumenta esponenzialmente perché i multi fotoni interagiscono.

Siccome nel caso di un calcolatore quantistico si ha una crescita esponenziale del numero di guide d'onda, la probabilità di funzionamento non è unitaria e si ha un over head del numero di detector e del numero di qubit di ancilla di controllo, il calcolatore quantistico non si può definire scalabile.

Una comune applicazione della porta SWAP potrebbe essere legata alla definizione di simmetria e anti simmetria di uno stato quantistico. Lo scambio di due particelle vuol dire swapparle spazialmente. Considerando i quattro stati di Bell ed effettuando lo scambio tra i due qubit, a seguito dello SWAP si ottiene quanto segue:

$$|\phi^+\rangle \rightarrow |\phi^+\rangle : \text{stato simmetrico},$$

$$|\phi^-\rangle \rightarrow |\phi^-\rangle : \text{stato simmetrico},$$

$$|\psi^+\rangle \rightarrow |\psi^+\rangle : \text{stato simmetrico},$$

$$|\psi^-\rangle \rightarrow |-\psi^-\rangle : \text{stato anti - simmetrico (lo stato subisce uno sfasamento di } \pi).$$

Con tale premessa si può analizzare un ulteriore fenomeno interessante che coinvolge gli stati entangled, ovvero il cosiddetto entanglement swapping. Si considerano due sorgenti di stati entangled, ove i fotoni 2 e 3, relativi alle due sorgenti, incidono su un beam splitter 50:50. A seguito del beam splitter si effettua una misurazione sui fotoni, la quale implicherà che i fotoni 1 e 4 risulteranno in uno stato entagled. Tale misura proietta uno stato sull'altro e l'entanglement tra le particelle 1 e 4 si ottiene esclusivamente nel caso in cui si misura anti-coalescenza sui fotoni 2 e 3 a seguito del beam splitter 50:50. L'importanza di tale processo è significativa, in quanto esso è l'unico metodo di ripetizione del segnale nel campo dell'informazione quantistica, in quanto sul singolo fotone non si può effettuare amplificazione senza distruggere l'informazione in esso contenuta. Come risultato finale si ottiene che i fotoni 1 e 4 si troveranno nello stato $|\psi^-\rangle$. Il funzionamento pratico di tale sistema deve essere contestualizzato al fatto che per generare stati entangled si ha bisogno di sorgenti parametriche (stati squeezed: $|0\rangle, |2\rangle, |4\rangle, \dots$). La verifica che si sono trasmessi due stati entangled ($|2\rangle, |2\rangle$) potrebbe essere avallata esclusivamente con le coincidenze a quattro (processo di post-selection). Pertanto bisogna considerare la $P(2)$, ovvero la probabilità di emettere una combinazione lineare di stati di vuoto squeezed e una sovrapposizione di due fotoni, ovvero si dovrà considerare una distribuzione di probabilità di tipo termica (Bose-Einstein), in aggiunta ad una bassa efficienza di conversione ed alle perdite del sistema. Quanto descritto riduce il funzionamento pratico di tale processo.

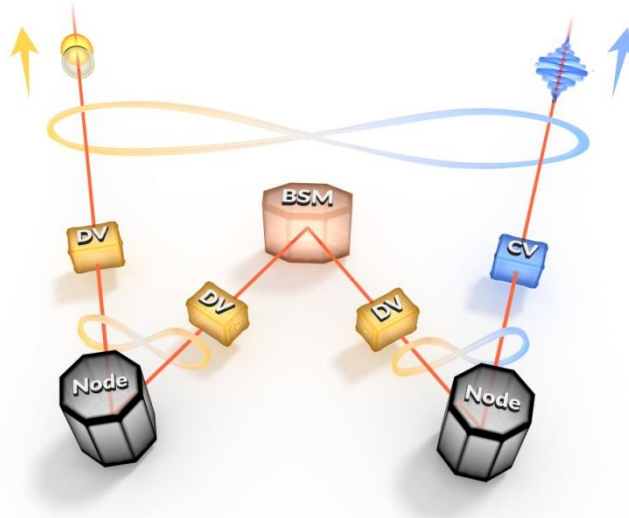


Figura 11: Schema per la realizzazione dell'entanglement swapping.

Un'altra applicazione dello SWAP gate è nel campo della computazione per verificare se il risultato di un operazione è uguale ad un caso noto oppure no. Quanto descritto è utile nel campo del machine learning per implementare l'addestramento induttivo sulle reti neurali. Nel campo quantistico si impiega un control SWAP (CSWAP), in cui se il qubit di controllo è $|1\rangle$, allora si effettua uno swapping di due stati quantistici ($|\phi\rangle|\psi\rangle \Rightarrow |\psi\rangle|\phi\rangle$). Inserendo un operatore di Hadamard sia a valle sia a monte sul qubit di controllo del CSWAP si ottiene quanto segue:

$$|0\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle: \quad (270)$$

stato iniziale,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|\phi\rangle|\psi\rangle: \quad (271)$$

applicazione del primo Hadamard sul qubit di ancilla,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle + |1\rangle|\psi\rangle|\phi\rangle): \quad (272)$$

applicazione del control SWAP,

$$\frac{1}{2}((|0\rangle + |1\rangle)|\phi\rangle|\psi\rangle + (|0\rangle - |1\rangle)|\psi\rangle|\phi\rangle): \quad (273)$$

applicazione del secondo Hadamard sul qubit di ancilla,

$$\frac{1}{2}((|0\rangle + |1\rangle)|\phi\rangle|\psi\rangle + (|0\rangle - |1\rangle)|\psi\rangle|\phi\rangle) = \frac{1}{2}|0\rangle(|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle) + \frac{1}{2}|1\rangle(|\phi\rangle|\psi\rangle - |\psi\rangle|\phi\rangle) \quad (274)$$

Applicando la misura solo sul qubit di controllo, si ricava l'ampiezza di probabilità associata:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (\langle \phi | \langle \psi | \phi \rangle | \psi \rangle + \langle \psi | \langle \phi | \psi \rangle | \phi \rangle + \langle \phi | \langle \psi | \psi \rangle | \phi \rangle + \langle \psi | \langle \phi | \phi \rangle | \psi \rangle) = \\ & \frac{1}{4} (2\langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle + 2\langle \phi | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle) \end{aligned} \quad (275)$$

Da qui si ottengono le seguenti probabilità:

$$\frac{1}{2} (1 + |\langle \phi | \psi \rangle|^2) = P|0\rangle \text{ (probabilità di misurare } |0\rangle \text{ sul qubit di controllo)} \quad (276)$$

$$\frac{1}{2} (1 - |\langle \phi | \psi \rangle|^2) = P|1\rangle \text{ (probabilità di misurare } |1\rangle \text{ sul qubit di controllo)} \quad (277)$$

Nel caso in cui $|\phi\rangle = |\psi\rangle$, si ottiene $P|0\rangle = 1$ e $P|1\rangle = 0$.

In questo modo si è effettuato un confronto tra due qubit senza andarli a misurare direttamente, bensì facendo una misurazione solo sul qubit di controllo, evitando di effettuare tomografia sullo stato da confrontare. Le misure tomografiche permettono di visualizzare il vettore sulla sfera di Bloch, ma per fare ciò servirebbe preparare N volte un medesimo stato quantistico. Tali risultanze si ottengono se i due stati sono ortonormali tra di loro, consentendo di costruire una procedura di quantum machine learning.

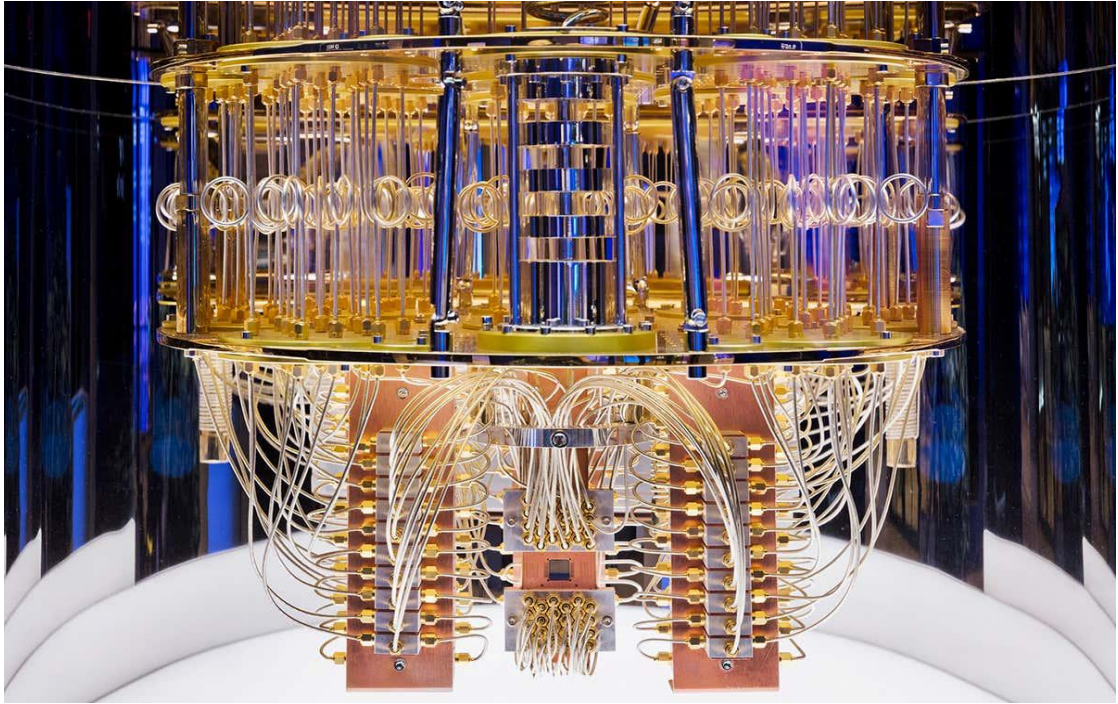


Figura 12: Foto del computer quantistico di IBM.

Quantum Illumination

Prima di affrontare qualsiasi argomentazione sul radar quantistico, è necessario riportare la teoria dell'illuminazione quantistica. Tale teoria è il fondamento peculiare di un dispositivo radar quantistico, utile anche per apportare ulteriori analisi in ottica comparativa tra tecnologie classiche e quantistiche.

Teoria dell'illuminazione quantistica

Lloyd ha coniato il termine "illuminazione quantistica" per il suo approccio basato sull'entanglement per migliorare, in regime ottico, la capacità di un dispositivo radar di rilevare un bersaglio debolmente riflettente immerso nel rumore di fondo che può essere molto più forte rispetto al segnale di ritorno fornito dalla riflessione sul target. Il suo lavoro ha confrontato le prestazioni di rilevamento del bersaglio per due scenari che sono rappresentati nella Figura 11. In entrambi gli scenari, un trasmettitore ottico illumina una regione dello spazio in cui è altrettanto probabile che un bersaglio poco riflettente sia assente o presente, all'interno di un ambiente ove un rumore di fondo risulta sempre presente. Nella Figura 11 (a), il raggio del segnale del trasmettitore è una sequenza di N impulsi a fotone singolo fotone, caratterizzati da un elevato prodotto larghezza di banda-tempo ($M = TW \gg 1$). Il ricevitore, per questo scenario a singolo fotone (SP), presenta una minima probabilità di errore nella decisionalità tra le ipotesi H_0 (target assente) e H_1 (target presente), tramite l'osservazione del fotone di luce riflesso dalla regione di spazio interrogata. Nella Figura 11 (b), il trasmettitore illumina la regione di interesse con una sequenza di N impulsi di segnale a singolo fotone, caratterizzati da un elevato prodotto larghezza di banda-tempo ($M = TW \gg 1$), ciascuno dei quali è entangled con un impulso a singolo fotone idler. Il ricevitore, per questa tipologia di illuminazione quantistica (QI), effettua una minimizzazione della probabilità di errore tra le ipotesi H_0 e H_1 , tramite l'osservazione del fotone idler e del fotone signal riflesso che ha interrogato la regione di spazio dove si suppone sia presente un target.

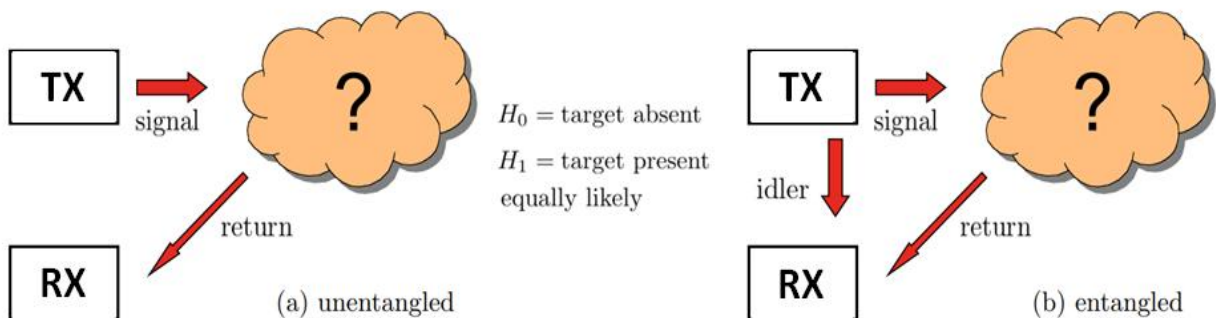


Figura 11: Scenari presunti nel trattamento dell'illuminazione quantistica (QI) di Lloyd. (a)

Funzionamento unentangled, in cui il trasmettitore illumina la regione di interesse con una sequenza di N impulsi di segnale a fotone singolo. L'assenza o la presenza di un target viene deciso deciso dall'osservazione del fotone di luce riflesso. (b) Funzionamento entangled, in cui il trasmettitore illumina la regione di interesse con una sequenza di N impulsi di segnale a singolo fotone (signal), ciascuno dei quali è entangled con il rispettivo impulso a singolo fotone (idler). L'assenza o la presenza del target viene decisa dall'osservazione del fotone idler memorizzato e del fotone signal riflesso.

I presupposti cruciali nell'analisi di Lloyd degli scenari non entangled e entangled sono i seguenti:

- quando il target è presente, la trasmissività del viaggio del segnale di andata e ritorno da trasmettitore a target a ricevitore è $0 < \kappa < 1$;
- il numero medio di fotoni del rumore di fondo per ogni modo temporale, NB , soddisfa la condizione di bassa luminosità $NB \ll 1$;
- per ogni impulso di segnale trasmesso, al massimo un fotone viene restituito al ricevitore, indipendentemente dalla presenza o assenza del target, implicando che $MNB \ll 1$.

In base a questi presupposti, Lloyd ha identificato due regimi di operazione, in "buone" e "pessime" condizioni, per lo scenario SP e QI confrontando le rispettive probabilità di errore con i limiti di Chernoff in tali regimi di funzionamento. Nel regime di buone condizioni, la probabilità di errore di SP e QI presentano lo stesso limite:

$$P_r(e)_{SP} \leq \frac{e^{-N\kappa}}{2} \text{ e } P_r(e)_{QI} \leq \frac{e^{-N\kappa}}{2}, \quad (278)$$

il quale, poiché $N\kappa$ eguaglia il numero medio di fotoni signal riflessi quando il target è presente, a differenza del numero medio di fotoni riflessi risultante nullo in condizione di target assente, è uguale al limite di shot-noise per una comunicazione laser con modulazione OOK (on-off keying). QI presenta un vantaggio sostanziale in regime di buone condizioni rispetto a SP, poiché la condizione di buon regime per SP è limitata da $\kappa \gg NB$, mentre il funzionamento QI si estende ad una regione di parametri più estesa in cui $\kappa \gg NB/M$.

La comparazione tra le operazioni SP e QI è radicalmente differente in regime di condizioni pessime. In tale casistica, Lloyd ha trovato che:

$$P_r(e)_{SP} \leq \frac{e^{-\frac{N\kappa^2}{8NB}}}{2}, \text{ per } \kappa \ll NB, \quad (279)$$

e

$$P_r(e)_{QI} \leq \frac{e^{-\frac{N\kappa^2 M}{8NB}}}{2}, \text{ per } \kappa \ll NB/M. \quad (280)$$

QI gode di un fattore M nell'esponente della probabilità di errore (rapporto segnale/rumore effettivo). A frequenze ottiche, è facile ottenere un prodotto elevato di larghezza di banda-tempo, ad esempio un impulso di $1 \mu s$ alla frequenza centrale di 300 THz (lunghezza d'onda di $1 \mu m$) con larghezza di banda di 1 THz , produce $M = 10^6$, nel qual caso il QI del regime in pessime condizioni di Lloyd ha un rapporto segnale/rumore effettivo superiore di 60 dB rispetto al caso equivalente di funzionamento SP. Inoltre questo vantaggio è ottenuto nonostante il rumore di fondo stia distruggendo la condizione di entanglement iniziale, ovvero i fotoni idler trattenuti e quelli signal riflessi non sono in uno stato entangled. Sebbene quanto teorizzato da Lloyd circa l'analisi del funzionamento QI comporti una sorgente di coppie di singoli fotoni entangled con elevato fattore TW, una memorizzazione dei fotoni di idler senza alcuna perdita e la realizzazione di un ricevitore quantistico ottimale, l'enorme miglioramento teorizzato nella condizione di regime in pessime condizioni hanno motivato una grande quantità di ulteriori ricerche effettuate successivamente.

Le misurazioni dei fotoni in uno stato coerente in qualsiasi delle tre tipologie di photodetection (detection diretta, omodina e eterodina) non richiedendo la teoria della photodetection quantistica per l'ottenimento di una corretta statistica di misura, sono considerate di tipologia classica. A tal proposito, lo stato a singolo fotone (SP) e gli stati entangled (QI) richiamati nella trattazione di Lloyd, sono, pertanto, riconducibili a due tipologie di radar quantistici con l'unica differenza di impiego di entanglement. Uno stato coerente, che non sia quello di vuoto, è caratterizzato da una combinazione lineare di stati numero, contenente un numero randomico di fotoni. Quindi è interessante confrontare il funzionamento di un trasmettitore di stato coerente (laser ideale - CS) che produce una sequenza di N impulsi, ognuno dei quali con un numero medio di fotoni unitario, con quanto proposto da Lloyd nel caso quantistico (QI). Il limite Chernoff quantistico per tale stato coerente è:

$$P_r(e)_{CS} \leq \frac{e^{-N\kappa(\sqrt{1+N_B}-\sqrt{N_B})^2}}{2}, \quad (281)$$

che per $NB \ll 1$ (condizione di bassa luminosità che Lloyd ha assunto nel caso di funzionamento QI), si riduce a:

$$P_r(e)_{CS} \leq \frac{e^{-N\kappa}}{2}. \quad (282)$$

Questa analisi condotta da Shapiro e Lloyd ha mostrato che un radar a stato coerente aveva prestazioni uguali o addirittura superiore al funzionamento QI. Fortunatamente per l'illuminazione quantistica Tan aveva già analizzato un sistema quantistico basato su stato gaussiano che superava le prestazioni di tutti i possibili radar con approccio classico, a parità di potenza di trasmissione.

Tan ha iniziato a confrontare gli approcci classici e quantistici per la realizzazione di un radar, secondo lo scenario indicato in Figura 12, al fine di rilevare un oggetto scarsamente riflettente ($0 < \kappa \ll 1$) che potrebbe essere presente o assente all'interno di una regione di spazio caratterizzata da un rumore elevato sempre presente ($N_B \gg 1$). Il radar classico (Figura 12 (a)) illumina la regione di spazio di interesse con un impulso di stato coerente (laser) avente un numero medio di fotoni MN_s , ove $N_s \ll 1$ e $M = TW \gg 1$. La presenza o l'assenza del target viene decisa dall'osservazione dei fotoni di ritorno. Il radar quantistico QI (Figura 12 (b)) emette impulsi di stati entangled generati dall'uscita di sorgente di down conversion spontanea parametrica (SPDC), avente una banda di phase-matching pari a W e un numero medio di fotoni signal e idler per modo temporale $N_s \ll 1$. La presenza o l'assenza del target viene decisa dall'osservazione del fotone idler memorizzato e del fotone signal riflesso.

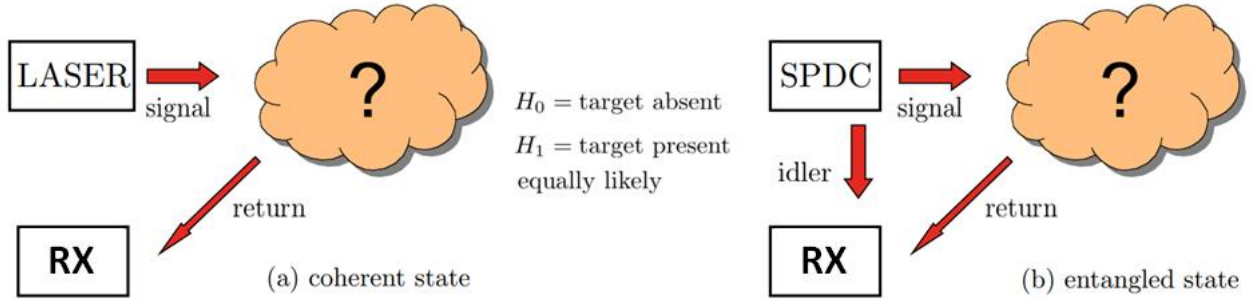


Figura 12: Scenario supposto da Tan per il trattamento della quantum illumination. (a) Un trasmettitore laser illumina la regione di interesse con impulsi di stati coerenti con numero medio di fotoni pari a MN_s . La presenza o l'assenza del target viene decisa dall'osservazione dei fotoni riflessi. (b) Un trasmettitore illumina la regione di interesse con un impulso di durata T ottenuto da una sorgente SPDC (con numero medio di fotoni per modo temporale pari a $N_s \ll 1$), la cui banda di phase-matching W soddisfa la condizione per cui $M = TW \gg 1$. La presenza e l'assenza del target viene decisa dall'osservazione del fotone idler memorizzato e del fotone signal riflesso.

Tan ha trovato le seguenti formulazioni per i limiti di Chernoff per il funzionamento CS e QI, i quali sono differenti da quelli trovati da Lloyd per i funzionamenti SP e QI:

$$P_r(e)_{CS} \leq \frac{e^{-\left(\frac{M\kappa N_s}{4N_B}\right)}}{2}, \quad (283)$$

e

$$P_r(e)_{QI} \leq \frac{e^{-\left(\frac{M\kappa N_s}{N_B}\right)}}{2}, \quad (284)$$

in cui, in entrambi i casi, si è supposto che $N_B \gg 1$, $N_S \ll 1$ e $0 < \kappa \ll 1$, casistica assimilabile a quanto trattato da Lloyd nel caso di pessime condizioni di regime. Tuttavia, rispetto a quanto teorizzato da Lloyd agli inizi della teoria dell'illuminazione quantistica, in cui in condizioni di pessime condizioni si era teorizzato un fattore migliorativo M nell'esponente della probabilità di errore, fattore elevato in regime ottimo, dalle formule ottenute dall'analisi di Tan il sistema quantistico presenta un miglioramento di fattore 4 nell'esponente della probabilità di errore rispetto al caso classico (CS), a parità di stessa potenza di trasmissione. Ciò si ottiene a prescindere dal prodotto banda-tempo $M \geq 10^6$, facilmente ottenibile in regime ottico.

La Figura 13 mostra l'andamento dei limiti di Chernoff quantistici dell'analisi affrontata da Tan per $\kappa = 0.01$, $N_S = 0.01$ e $N_B = 20$. In tale Figura è anche incluso il limite inferiore di Bhattacharyya su $P_r(e)_{CS}$. È importante sottolineare che i limiti di Chernoff sono noti per essere limiti esponenziali superiori stretti, a differenza dei limiti di Bhattacharyya.

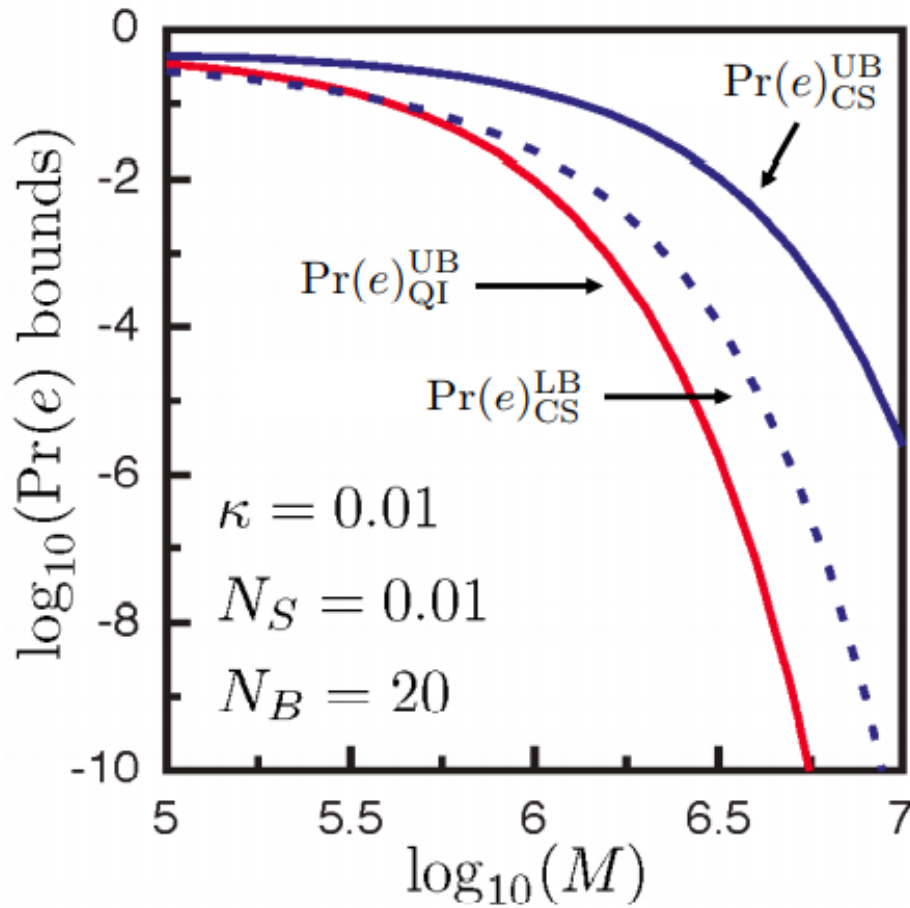


Figura 13: Limiti della probabilità di errore per i radar CS e QI di Tan: $P_r(e)_{CS}^{UB}$ è il limite quantistico Chernoff per il CS radar; $P_r(e)_{QI}^{UB}$ è il limite quantistico Chernoff per il QI radar e $P_r(e)_{CS}^{LB}$ è il limite inferiore Bhattacharyya per il CS radar.

Dal grafico in Figura 13 si evince che $P_r(e)_{QI}^{UB}$ diventa minore di $P_r(e)_{CS}^{LB}$ per valori di M elevati, dimostrando la superiorità prestazionale di un radar quantistico rispetto a tutte le possibili tipologie di radar classico, a parità di potenza di trasmissione, secondo lo scenario descritto da Tan.

È possibile descrivere matematicamente il modo temporale m-esimo dello stato entangled contenente i fotoni idler e signal relativamente all'approccio quantistico (QI) descritto da Tan:

$$|\psi_m\rangle_{SI} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{N_s^n}{(N_s+1)^{n+1}}} |n\rangle_{Sm} |n\rangle_{Im}, \quad (285)$$

il quale è uno stato squeezed rappresentato come combinazione di stati numero con distribuzione di probabilità di tipo termino (Bose-Einstein). Invece il modo temporale m-esimo dello stato coerente caratterizzante l'approccio descritto da Tan di tipo classico (CS) è il seguente:

$$|\psi_m\rangle_S = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{N_s^n e^{N_s}}{n!}} |n\rangle_{Sm}, \quad (286)$$

il quale è uno stato coerente rappresentato come combinazione di stati numero con distribuzione di probabilità di tipo Poussoniana.

Al modo m-esimo dei fotoni signal e idler del caso QI descritto da Tan è possibile associare i corrispondenti operatori di distruzione e creazione. Un ideale conteggio di fotoni sul modo m-esimo dei fotoni signal e idler misura i seguenti operatori:

$$N_{Sm} = a_{Sm}^\dagger a_{Sm}, \quad (287)$$

$$N_{Im} = a_{Im}^\dagger a_{Im}. \quad (288)$$

Il modo m-esimo del signal e del idler presenta gli operatori di quadratura:

$$Re(a_{Km}) = \frac{a_{Km} + a_{Km}^\dagger}{2} \text{ (associabile all'operatore posizione)}, \quad (289)$$

$$Im(a_{Km}) = \frac{a_{Km} - a_{Km}^\dagger}{2i} \text{ (associabile all'operatore momento)}, \quad (290)$$

per K=S,I, e una rilevazione omodina ottica ideale misurerebbe i suddetti operatori. Il POVM associato con a_{Sm} e a_{Im} può essere realizzato da un rilevamento eterodina ideale. Sebbene il rilevamento eterodina fornisce informazioni su entrambi i contributi in quadratura, il principio di indeterminazione di Heisenberg forza questa misura ad aggiungere del rumore su ogni componente in quadratura che non è presente nella misurazione omodina di una singola componente in quadratura.

Lo stato coerente è uno stato gaussiano con $\langle a_{sm} \rangle = \sqrt{N_s}$ (291) e $\langle \Delta a_{sm}^\dagger \Delta a_{sm} \rangle = \langle \Delta a_{sm}^2 \rangle = 0$ (292), con $\Delta a_m = a_m - \langle a_m \rangle$.

Lo stato squeezed entangled a due modi (TMSV) è uno stato gaussiano, le cui misure statistiche sono caratterizzate da:

$$\langle a_{sm} \rangle = \langle a_{Im} \rangle = 0, \quad (293)$$

$$\langle a_{sm}^\dagger a_{sm} \rangle = \langle a_{Im}^\dagger a_{Im} \rangle = N_s, \quad (294)$$

$$\langle a_{sm}^2 \rangle = \langle a_{Im}^2 \rangle = 0, \quad (295)$$

$$\langle a_{sm}^\dagger a_{Im} \rangle = 0, \quad (296)$$

$$\langle a_{sm} a_{Im} \rangle = \sqrt{N_s(N_s + 1)}. \quad (297)$$

Lo studio di queste variabili statistiche dello stato entangled risultano alla base della comprensione del vantaggio quantistico rispetto alle casistiche classiche. Le cross correlazioni di tutti gli stati signal-idler classici a media nulla, devono obbedire alle seguenti condizioni:

$$|\langle a_{sm}^\dagger a_{Im} \rangle| \leq \sqrt{\langle a_{sm}^\dagger a_{sm} \rangle \langle a_{Im}^\dagger a_{Im} \rangle}, \quad (298)$$

$$|\langle a_{sm} a_{Im} \rangle| \leq \sqrt{\langle a_{sm}^\dagger a_{sm} \rangle \langle a_{Im}^\dagger a_{Im} \rangle}. \quad (299)$$

Per uno stato quantistico arbitrario a media nulla si hanno le seguenti condizioni:

$$|\langle a_{sm}^\dagger a_{Im} \rangle| \leq \sqrt{\langle a_{sm}^\dagger a_{sm} \rangle \langle a_{Im}^\dagger a_{Im} \rangle}, \quad (300)$$

$$|\langle a_{sm} a_{Im} \rangle| \leq \sqrt{\max_{K=S,I} (\langle a_{Km}^\dagger a_{Km} \rangle) \min_{K=S,I} (\langle a_{Km}^\dagger a_{Km} \rangle + 1)}. \quad (301)$$

Lo stato TMSV è uno stato gaussiano a media zero che soddisfa la seguente condizione:

$$|\langle a_{sm} a_{Im} \rangle| = \sqrt{N_s(N_s + 1)} > N_s = \sqrt{\langle a_{sm}^\dagger a_{sm} \rangle \langle a_{Im}^\dagger a_{Im} \rangle}. \quad (302)$$

Pertanto, esso è uno stato non classico ed è massimamente entangled in quanto si rispetta la seguente condizione limite:

$$|\langle a_{sm} a_{Im} \rangle| = \sqrt{\max_{K=S,I} (\langle a_{Km}^\dagger a_{Km} \rangle) \min_{K=S,I} (\langle a_{Km}^\dagger a_{Km} \rangle + 1)}. \quad (303)$$

Inoltre, esprimendo l'operatore di annichilazione del modo m-esimo riflesso in condizione di target presente:

$$a_{Rm} = \sqrt{\kappa}a_{Sm} + \sqrt{(1 - \kappa)}a_{Bm}, \quad (304)$$

dove a_{Bm} rappresenta l'operatore di annichilazione del rumore di fondo dell'ambiente circostante, il sistema QI di Tan, relativamente all'ipotesi H1 di target presente, presenta la seguente condizione di cross correlazione:

$$\langle a_{Rm}a_{Im} \rangle_{H1} = \sqrt{\kappa N_s(N_s + 1)}. \quad (305)$$

Invece, relativamente all'ipotesi H0 di target assente, si ha la seguente condizione di cross correlazione:

$$\langle a_{Rm}a_{Im} \rangle_{H0} = 0. \quad (306)$$

Quando $N_s \ll 1$, la suddetta condizione di cross correlazione, che rappresenta la condizione di target presente nell'area di interesse, si ottiene che il sistema QI di Tan risulta maggiore di $\sqrt{\kappa}N_s$, che costituisce il limite classico di cross correlazione che si applica quando $\langle a_{sm}^\dagger a_{sm} \rangle = \langle a_{Im}^\dagger a_{Im} \rangle = N_s$. A tal proposito, sebbene anche nel caso in cui $N_s \gg 1$ il sistema QI presenta comunque una, seppur minore, supremazia rispetto al caso classico, la condizione in cui si dimostra un vantaggio netto e maggiormente sfruttabile per la costruzione di un radar basato sulle condizioni di quantum illumination, è quella in cui si ha un basso numero medio di fotoni emessi $N_s \ll 1$.

A questo punto ci si deve focalizzare sulla costruzione di un ricevitore in grado di sfruttare il beneficio mostrato matematicamente dal miglioramento nei termini di cross correlazione nel sistema QI, in regime di bassa emissione di fotoni, di un target a bassa riflettività e in un ambiente di interesse caratterizzato da rumore di fondo. Il prodotto $a_{Rm}a_{Im}$ può essere espanso in quattro termini che sono i prodotti delle componenti in quadratura dei fotoni memorizzati e di quelli riflessi e le summenzionate componenti possono essere misurate con un rilevamento omodino. Purtroppo questo approccio non funziona nella pratica, in quanto si necessita di misurare entrambe le componenti in quadratura dei modi memorizzati e riflessi e quanto descritto non può essere implementato per il principio di indeterminazione di Heisenberg. Quindi si dovrebbe fare una rilevazione di tipo eterodino senza l'aggiunta di rumore addizionale. L'effetto netto di tale analisi è che non possono essere implementate né rilevazioni omodine né eterodine per realizzare il vantaggio mostrato dall'approccio quantistico rispetto a quello classico. Anche il rilevamento diretto (conteggio di fotoni in risoluzione temporale) non è in grado di realizzare alcun vantaggio prestazionale QI. Sebbene la sorgente parametrica SPDC produca una coppia di fotoni signal e idler

in coincidenza temporale, i conteggi in coincidenza dei fotoni in fase di rilevamento, impiegato comunemente, non fornisce un'impiegabile evidenza del rilevamento quantistico di un oggetto. Tale risultato negativo è dovuto al fatto che la presenza di un elevato livello di rumore di fondo dell'ambiente circostante in ricezione implica che ogni rilevamento di un fotone idler avrà un conteggio in coincidenza dovuto ai fotoni di ritorno (rumore) a prescindere dalla presenza o assenza del target.

La condizione di presenza di un target nel sistema QI di Tan è la cross correlazione sensibile alla fase tra il fotone riflesso e il fotone memorizzato: $\langle a_{Rm} a_{Im} \rangle_{H1}$. La cross correlazione non sensibile alla fase del fotone riflesso e memorizzato in presenza di un target $\langle a_{Rm}^\dagger a_{Im} \rangle_{H1}$, può essere misurata nell'interferenza di secondo ordine tra i due fasci. Ma il sistema QI di Tan ha $\langle a_{Rm}^\dagger a_{Im} \rangle_{Hj} = 0$, per $j = 0,1$, a prescindere dalla presenza o meno di un oggetto. Tale problematica è stata analizzata da Guha e Erkmen che hanno mostrato una parziale soluzione con un amplificatore parametrico ottico (OPA) ricevente.

In cristalli che hanno una suscettibilità non lineare del secondo ordine, come il niobato di litio, una campo di pompa forte produce due fotoni in uscita secondo una conservazione della frequenza e del momento, ove in generale mW di potenza del segnale di potenza, generano pW di potenza in uscita nei fotoni signal e idler. Il ricevitore OPA impiegato utilizza un guadagno estremamente basso, che può essere realizzato con un cristallo identico a quello impiegato nella sorgente SPDC. Nel ricevitore il fotone riflesso e memorizzato sono applicati come ingressi signal e idler del cristallo OPA e il modo m-esimo dell'uscita idler è dato da:

$$a_{Im}^{out} = \sqrt{G} a_{Im} + \sqrt{(G-1)} a_{Rm}^\dagger, \quad (307)$$

in cui il guadagno $G > 1$ è scelto per ottimizzare le prestazioni della rilevazione del target. Il conteggio ideale di fotoni è fatto su tutti i modi di uscita idler con la misurazione dell'operatore del numero totale di fotoni:

$$N_T = \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} a_{Im}^{out\dagger} a_{Im}^{out}. \quad (308)$$

Sebbene scritto come una somma di operatori di numeri di fotoni modali, la misura di N_T è facilmente realizzabile contando i fotoni sull'uscita idler di durata T del OPA in risposta alla durata T degli ingressi memorizzati e riflessi. La coniugazione di fase del contributo di fotoni riflessi all'uscita idler del OPA conduce ad una condizione sensibile alla fase di cross correlazione nel caso di target presente, in una misurazione di conteggio di fotoni, in cui senza la coniugazione di fase si ha soltanto la cross correlazione non sensibile alla fase che può essere misurata con un

interferometro a conteggio di fotoni. È l'elevata intensità dei fotoni di ritorno dalla componente di fondo, in relazione alla componente idler memorizzata a bassa intensità che conduce al guadagno ottimo del ricevitore OPA, soddisfacendo la relazione che $G - 1 \ll 1$. A tale valore ottimo di guadagno, Guha e Erkmen hanno trovato il limite quantistico Chernoff del loro ricevitore essere pari a:

$$P_r(e)_{OPA} \leq \frac{e^{-\frac{MKN_S}{2N_B}}}{2}, \quad (309)$$

nelle condizioni usuali del regime QI, implicando un miglioramento di 3dB nell'esponente della probabilità errore rispetto al sistema CS di Tan, a parità di energia trasmessa. All'interno del limite Chernoff per il ricevitore OPA vi sono due importanti assunzioni, entrambe delle quali giungono dalla natura interferometrica di applicare i fotoni di ritorno e quelli memorizzati idler agli ingressi segnale e idler di un OPA a basso guadagno. La prima assunzione è che il fotone idler è memorizzato senza perdite. La seconda è che la memorizzazione del fotone idler è abbinata in ritardo temporale e di fase al segnale di ritorno dal target (quando lo stesso è presente).

Il fatto che un ricevitore OPA non raggiunga i 6dB previsti dal vantaggio quantistico nell'esponente della probabilità di errore è una conseguenza dello scenario di Tan che prevede il test effettuato su uno stato misto, mentre la ricezione OPA impiega misurazioni in coppia.

Se la coppia di fotoni illumina un cristallo identico a quello impiegato per la sua generazione SPDC, allora con una probabilità estremamente bassa, una generazione somma-frequenza può avvenire (SFG), un processo di fusione di fotoni in cui la coppia di fotoni signal-idler è convertita in un singolo fotone di pompa. A causa dell'elevata intensità del rumore di fondo, è necessario effettuare molteplici cicli SFG e misurazioni di conteggio di fotoni, con appropriati feed-forward (FF) per una ricezione quantistica ottimale. Ciò ha mostrato che il ricevitore FF-SFG fornisce la minore percentuale di errore nel rilevamento quantistico di un target, consentendo di raggiungere un vantaggio di 6dB nel rapporto segnale-rumore effettivo. Tuttavia tale prestazione viene raggiunta con delle assunzioni, ovvero che l'ampiezza e la fase del segnale di ritorno sia nota, quando il target è presente, situazione che raramente si verifica nelle applicazioni lidar o radar. Per applicazioni lidar, la maggior parte delle superfici di un target sono sufficientemente ruvide tali da mostrare riflessioni con ampiezze e fasi distribuite. Il ricevitore OPA quantistico, che mostra un vantaggio di 3dB rispetto al caso classico per segnali riflessi con ampiezza e fase nota, non mostra alcun guadagno prestazionale per target Rayleigh-fading.

Il sistema QI proposto da Lloyd era basato su lunghezze d'onda nello spettro ottico, per dimostrare il vantaggio teorizzato dalla teoria quantistica rispetto a quella classica. Successivamente Tan si è dedicato anche lui al dominio ottico poiché la sorgente di stati entangled gaussiani era prodotta da

sorgenti parametriche non lineari. Ciononostante, sebbene Tan aveva trovato che le prestazioni quantistiche eccedevano quelle di tutti gli approcci classici, a parità di potenza di trasmissione, va sottolineato che il regime di pessime condizioni in cui tale vantaggio diventa maggiore è un qualcosa di poco realistico nelle lunghezze d'onda ottiche. I target minimamente riflettenti (quindi con una bassa radar cross-section) sono di grande interesse, inoltre la condizione di generare pochi fotoni medi in trasmissione è una condizione facilmente implementabile con l'impiego di cristalli non lineari SPDC, tuttavia la condizione di avere un numero medio elevato di fotoni di rumore di fondo non si realizza naturalmente nel campo ottico. Pertanto, tale vantaggio quantistico si potrebbe presentare esclusivamente in condizioni di jamming luminoso volontario. Un significativo interesse per lo sviluppo di un vero e proprio radar quantistico divenne concreto solo dopo che Barzanjeh propose un approccio per effettuare l'illuminazione quantistica nel dominio delle microonde, ovvero dove il rumore di fondo soddisfa la condizione di elevato numero medio di fotoni e dove la maggior parte dei sistemi radar operano per l'individuazione di oggetti.

In Figura 14 è mostrato lo schematico del trasmettitore e del ricevitore ipotizzato da Barzanjeh. In particolare, il trasmettitore si fonda su una conversione elettro-optomeccanica (EOM) per creare un segnale a microonde che risulta entangled con un idler ottico, al fine di trasmettere nella regione di interesse il segnale a microonde generato. Successivamente, si utilizza un altro convertitore EOM per up-convertire il segnale a microonde di ritorno nella regione ottica al fine di effettuare una misurazione congiunta a coniugazione di fase (PC) con il fotone idler memorizzato. Guha e Erkmen hanno dimostrato che le prestazioni di un ricevitore PC mostrano un vantaggio rispetto all'approccio classico, equivalente a quello ottenibile con l'impiego di un OPA (3dB nella probabilità di errore in condizioni ideali).

Relativamente agli aspetti di ricezione del segnale, i ricevitori OPA, PC, SFG e FF-SFG per l'illuminazione quantistica, presuppongono che il fotone di idler sia memorizzato per un tempo di andata e ritorno del fotone signal. Se la trasmittività del fotone idler è κ_I ($0 < \kappa_I \leq 1$), allora il limite Chernoff quantistico per un target non-fading è il seguente:

$$P_r(e)_{QI} \leq \frac{e^{-\frac{M\kappa\kappa_I N_S}{N_B}}}{2}, \quad (310)$$

per i ricevitori FF-SFG o SFG (vantaggio di 6 dB), e

$$P_r(e)_{QI} \leq \frac{e^{-\frac{M\kappa\kappa_I N_S}{2N_B}}}{2}, \quad (311)$$

per ricevitori OPA o PC (vantaggio di 3 dB), nel regime di pessime condizioni.

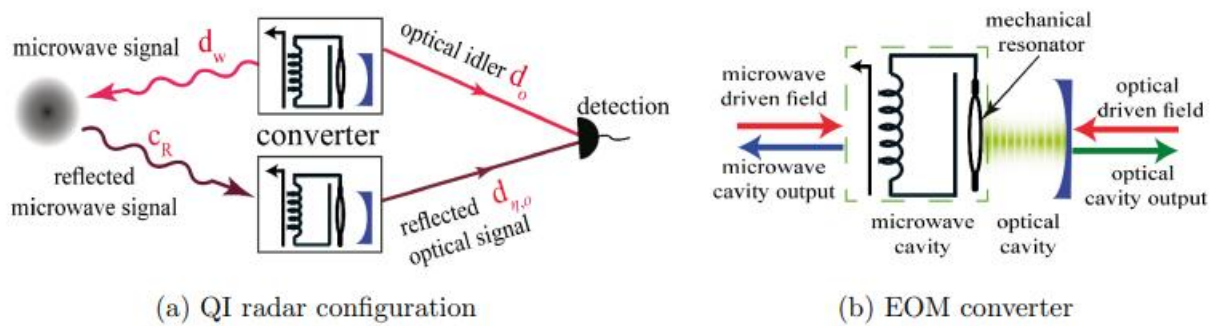


Figura 14: Schema dell'illuminazione di Barzanjeh per l'illuminazione quantistica e microonde. (a) Configurazione radar QI. (b) Configurazione del convertitore EOM.

Ovviamente i vantaggi teorici presentati nelle formule del probabilità di errore devono essere contestualizzati ad un fattore critico nella realizzazione pratica di tali ricevitori, ovvero sulla memorizzazione del fotone idler, ove le perdite in tale fase potrebbero facilmente annullare il vantaggio teorico fornito dall'illuminazione quantistica. A tal proposito, Barzanjeh aveva notato che una delle migliori tecniche disponibili per la memorizzazione di un fotone, basato su una linea di ritardo in fibra ottica, limitava il range massimo del sistema quantistico nel presentare qualche vantaggio prestazionale a 11.25 km.

Oltre questo fondamentale aspetto pratico connesso alla memorizzazione del fotone idler, la tecnica QI a microonde soffrirebbe altresì della difficoltà nell'ottenere un prodotto a larghezza di banda-tempo sufficientemente elevato, con durate di impulsi che abbiano senso per i radar a microonde. Il prodotto larghezza di banda-tempo elevato è fondamentale per il QI perché, a differenza di un radar convenzionale, le cui prestazioni migliorano, mantenendo costanti la durata dell'impulso e la larghezza di banda, aumentando la potenza del trasmettitore in assenza di clutter, il vantaggio prestazionale fornito dal QI degrada, a durata dell'impulso e larghezza di banda costante, all'aumentare della potenza del trasmettitore. Quindi, anche se i convertitori EOM di Barzanjeh, che sono intrinsecamente a banda stretta in quanto basati su un circuito risonante, fossero sostituiti con generatori a larga banda di stati entangled alle microonde, i prodotti larghezza di banda-tempo raggiungibili nel microonde sono ancora molto inferiori a quanto si potrebbe ottenere nella banda frequenziale ottica. Ad esempio, la larghezza di banda frazionaria dell'1/3 per cento a una lunghezza d'onda di $1\ \mu\text{m}$ che fornisce una durata dell'impulso di $1\ \mu\text{s}$ e un prodotto banda-tempo pari a 10^6 , con la medesima durata dell'impulso fornisce solo un prodotto pari a 10^2 con una lunghezza d'onda di $1\ \text{cm}$. A differenza di un radar convenzionale, tramite la QI si può solo interrogare una singola porzione di spazio caratterizzata da un'unica risoluzione azimutale, di elevazione, di distanza e di Doppler, e solo in tale condizioni si potrebbero trarre eventuali vantaggi rispetto ad un

radar convenzionale. Un approccio simultaneo di interrogazione dello spazio su molteplici risoluzioni (S) richiederebbe una corrispettiva ripartizione del segnale di memorizzazione di idler, facendo degradare le prestazioni del sistema di un fattore $10 \log_{10} S$ [dB] per singolo impulso. Pertanto, considerando un sistema ideale, un'interrogazione di 4 distinti risoluzioni dello spazio già annullerebbe il massimo vantaggio fornito dalla tecnica QI all'interno di un radar quantistico. A tal proposito è importante notare che l'amplificazione ottica non può essere usata per sopperire al problema di partizionamento del segnale di idler in quanto l'amplificazione aumenterebbe il rumore rispetto al segnale utile. Un ulteriore problema connesso con la tecnica QI è che il target dovrebbe trovarsi interamente all'interno della cella di risoluzione del radar per tutto il tempo della durata dell'impulso trasmesso. In caso contrario ci potrebbe essere un andamento temporale differente tra il segnale di ritorno e quello memorizzato idler. Questo disallineamento temporale potrebbe essere quantificato matematicamente nel fattore $0 < \kappa_m \leq 1$ all'esponente della funzione probabilità di errore e, nel campo ottico, questo fenomeno è maggiormente evidente a causa delle basse lunghezze d'onda coinvolte nella propagazione.

Per continuare la trattazione sulla tecnica di QI è necessario introdurre una comparazione tra approccio classico e quantistico facendo riferimento a radar rumore-correlato. Si modellino i fotoni riflessi del modo m -esimo quando un target è presente:

$$a_{Rm} = \sqrt{\kappa} e^{i\theta} a_{Sm} + \sqrt{1 - \kappa} a_{Bm}, \text{ per } |m| \leq \frac{M-1}{2}, \quad (312)$$

dove le variabili κ e θ potrebbero essere deterministiche e note oppure seguire una specifica distribuzione probabilistica. Inoltre si assume che il radar rumore-correlato impiega un rilevamento eterodino pre-amplificato, con una figura di rumore $NF \geq 1$, dove 1 è il caso ideale. Relativamente al radar quantistico rumore-correlato (QCN) si considera una sorgente SPDC e un rilevamento eterodino pre-amplificato alle frequenze signal e idler. Le variabili caratterizzanti il QCN sono un insieme di variabili indipendenti, identicamente distribuite, a valori complessi, vettori colonna a due dimensioni randomici $\{a_m = [a_{Rm}, a_{Im}]^T\}$, le cui componenti di quadratura hanno una distribuzione gaussiana a media nulla con le seguenti matrici di covarianza:

$$\Lambda_{H0}^{QCN} = \frac{G_A}{2} \begin{pmatrix} (N_B + N_F)I_2 & 0_2 \\ 0_2 & (N_S + N_F)I_2 \end{pmatrix}, \quad (313)$$

$$\Lambda_{H1,\kappa,\theta}^{QCN} = \frac{G_A}{2} \begin{pmatrix} (N_R + N_F)I_2 & C_q(\theta) \\ C_q^T(\theta) & (N_S + N_F)I_2 \end{pmatrix}. \quad (314)$$

Nelle suddette equazioni, G_A è il guadagno di pre-amplificazione; I_2 è la matrice identità 2x2; 0_2 è la matrice nulla 2x2; $N_R = \kappa N_S + N_B$ e $C_q(\theta) = \sqrt{\kappa N_S(N_S + 1)} R_q(\theta)$, con

$$R_q(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (315)$$

Il radar rumore-correlato classico (CCN) impiega una sorgente classica di rumore ad elevata luminosità la cui uscita è divisa, tramite uno splitter, in un signal a bassa luminosità e un idler ad elevata luminosità. Come il QCN, il radar CCN impiega una rilevazione eterodina pre-amplificata del fotone idler memorizzato e del signal di ritorno dalla regione di interesse. Le variabili caratterizzanti del CCN sono un insieme di variabili indipendenti, identicamente distribuite, a valori complessi, vettori colonna a due dimensioni randomici, le cui componenti di quadratura hanno una distribuzione gaussiana a media nulla con le seguenti matrici di covarianza:

$$\Lambda_{H0}^{CCN} = \frac{G_A}{2} \begin{pmatrix} (N_B + N_F)I_2 & 0_2 \\ 0_2 & (N_I + N_F)I_2 \end{pmatrix}, \quad (316)$$

$$\Lambda_{H1,\kappa,\theta}^{CCN} = \frac{G_A}{2} \begin{pmatrix} (N_R + N_F)I_2 & C_c(\theta) \\ C_c^T(\theta) & (N_I + N_F)I_2 \end{pmatrix}, \quad (317)$$

dove $C_c(\theta) = \sqrt{\kappa N_S N_I} R_c(\theta)$, con

$$R_c(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (318)$$

Da notare che avere una sorgente SPDC implica ottenere al trasmettitore del radar la medesima luminosità del signal e idler, mentre partendo da una sorgente di tipo classica con elevata luminosità ed uno splitter con elevata asimmetria nel rapporto di divisione, il trasmettitore del radar CCN può avere un signal a bassa luminosità, analogamente al caso QCN, ma un idler memorizzato ad elevata luminosità ($N_I \gg 1$).

Le relative prestazioni del rilevamento del target dei radar QCN e CCN possono essere maggiormente analizzate trasformando i loro dati di coppia modale:

$$a'_m = [a_{Rm}, \frac{a_{Im}}{\sqrt{N_S+1}}]^T * \frac{1}{\sqrt{G_A}} \text{ per il QCN}, \quad (319)$$

$$a'_m = [a_{Rm}, \frac{a_{Im}}{\sqrt{N_I}}]^T * \frac{1}{\sqrt{G_A}} \text{ per il CCN}. \quad (320)$$

A seguito di queste trasformazioni le matrici di covarianti hanno la seguente forma:

$$\Lambda_{H0}'^{QCN} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (N_B + N_F)I_2 & 0_2 \\ 0_2 & \left(1 + \frac{N_F-1}{N_S+1}\right) I_2 \end{pmatrix}, \quad (321)$$

$$\Lambda_{H1,\kappa,\theta}'^{QCN} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (N_R + N_F)I_2 & \sqrt{\kappa N_S} R_c(\theta) \\ \sqrt{\kappa N_S} R_c^T(\theta) & \left(1 + \frac{N_F-1}{N_S+1}\right) I_2 \end{pmatrix}, \quad (322)$$

$$\Lambda_{H0}'^{CCN} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (N_B + N_F)I_2 & 0_2 \\ 0_2 & \left(1 + \frac{N_F}{N_I}\right) I_2 \end{pmatrix}, \quad (323)$$

$$\Lambda'_{H1,\kappa,\theta}^{CCN} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (N_R + N_F)I_2 & \sqrt{\kappa N_S} R_c(\theta) \\ \sqrt{\kappa N_S} R_c^T(\theta) & \left(1 + \frac{N_F}{N_I}\right) I_2 \end{pmatrix}. \quad (324)$$

Da ciò è immediato verificare che il QCN e il CCN hanno identiche condizioni statistiche per $N_I \rightarrow \infty$ e per $N_F = 1$. Per detector non ideali $N_F > 1$, il radar CCN presenta prestazioni maggiori del QCN quando:

$$N_I > \frac{N_F(N_S+1)}{N_F-1}, \quad (325)$$

perché il fotone idler del radar CCN presenta un minor rumore rispetto al QCN, mentre gli altri elementi tra i due radar sono identici. Quanto riportato dimostra che il radar QCN non può superare le prestazioni di tutti i radar classici, a parità di energia trasmessa e dei medesimi detector impiegati. Per concludere i concetti ivi descritti sulla quantum illumination e per redigere una comparazione finale, è importante presentare le risultanze in termini di ROC (Receiver Operating Characteristic). Si presenta una comparazione della figura ROC di 5 radar differenti nella migliore condizione di scenario operativo, considerando un $\theta = 0$ e un κ noto e deterministico. Le ipotesi di partenza dei 5 radar sono le seguenti:

$$\kappa = 0.01, N_B = 20, N_{tot} = 2 * 10^4, N_S = 0.01, M = 2 * 10^6, N_I = 10^3 \text{ e } N_F = 1. \quad (326)$$

I 5 radar sono i seguenti:

- QCN;
- CCN;
- QI-OPA che usa il trasmettitore del QCN combinato a un ricevitore OPA con guadagno pari a $G = 1 + \frac{N_S}{\sqrt{N_B}}$ e un contatore di fotoni ideale;
- CS-Het, che trasmette un impulso di stato coerente con numero di fotoni medio pari a N_{tot} ed effettua una rilevazione eterodina;
- CS-Hom, che trasmette un impulso di stato coerente con numero di fotoni medio pari a N_{tot} ed effettua una rilevazione omodina.

La figura di ROC, mostrata in Figura 15, è rappresentata in funzione della probabilità di falsi allarmi P_F e della probabilità di bersaglio mancato P_M , in scala logaritmica, per $P_F, P_M \leq 0.5$.

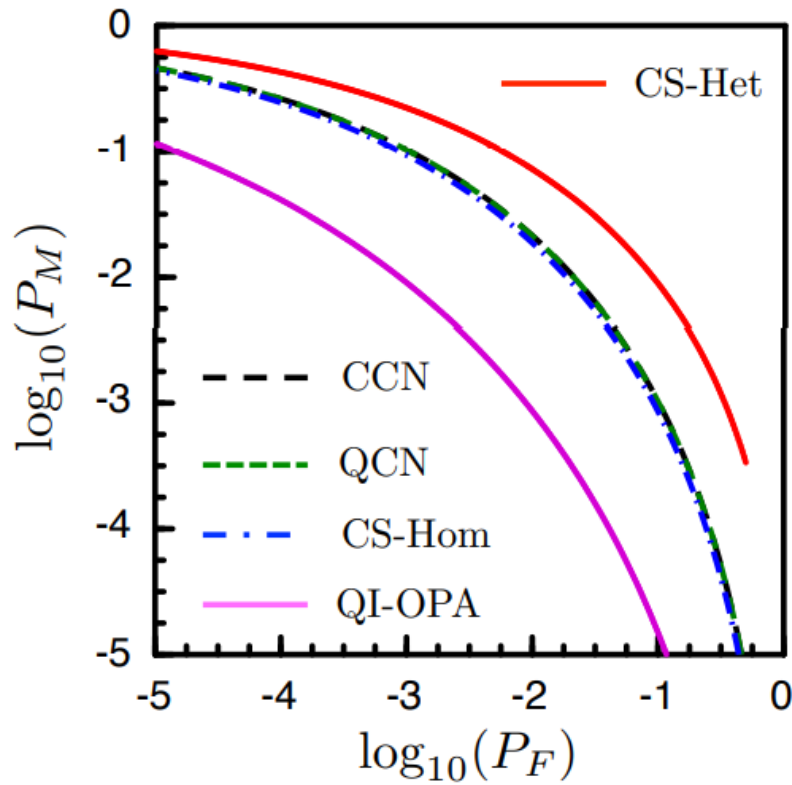


Figura 15: Esempio di figura ROC per 5 tipologie di radar.

La Figura 15 mostra due risultati attesi:

- il QCN e il CCN sono indistinguibili;
- il QI-OPA presenta le migliori prestazioni rispetto agli altri approcci.

Viene anche mostrato un risultato inatteso, ovvero che il CCN e il CS-Hom sono anch'essi indistinguibili. È da notare che QCN, CCN, CS-Hom e QI-OPA usano le informazioni di fase, mentre il CS-Het non usa l'informazione di fase, poiché il ricevitore implementa una rilevazione non coerente alla frequenza intermedia. Per il QCN e il CCN con θ noto, l'informazione di fase è utilizzata per effettuare una rilevazione coerente alle frequenze intermedie. Il CS-Hom e il QI-OPA richiedono informazioni di fase, poiché il CS-Hom necessita di agganciare la fase del suo oscillatore locale a quella del segnale di ritorno, mentre QI-OPA necessita di agganciare la fase del fotone idler memorizzato a quella del segnale di ritorno. Inoltre, si ritiene importante sottolineare una contestualizzazione concernente le sorgenti impiegati dal QCN e dal CCN: il QCN richiede una diluzione refrigerante per consentire all'amplificatore parametrico a giunzione Johnson di operare correttamente, mentre il radar CCN potrebbe impiegare un generatore di rumore a microonde operante a temperatura ambiente.

Quantum Radar

Le premesse e le discussioni effettuate sull'illuminazione quantistica sono fondamentali per poter parlare di radar quantistico. In sintesi è stato dimostrato che l'illuminazione quantistica è un esempio di protocollo quantistico in cui il miglioramento della sensibilità derivato dall'uso di stati entangled sopravvive agli effetti del rumore ambientale. Anzi, il vantaggio dell'entanglement rispetto alle fonti non entangled è, sorprendentemente e contro intuitivamente, maggiore quando il sistema è immerso in ambienti rumorosi.

Questo risultato teorico ha acceso numerose indagini e dimostrazioni di illuminazione quantistica, a livello teorico e sperimentale. Uno degli obiettivi in tale ricerca era e rimane tuttora, la realizzazione di un radar quantistico, un radar che sfrutta il protocollo di illuminazione quantistica per il rilevamento di un target, con prestazioni superiori all'approccio classico. È diventato chiaro che il miglioramento dell'illuminazione quantistica rispetto all'illuminazione classica era limitato da considerazioni teoriche e tecnologiche e che l'obiettivo della realizzazione di un radar quantistico dovrà attendere la risoluzione di diverse questioni a livello pratico e teorico e inoltre, che il miglioramento non può non essere così forte come inizialmente teorizzato. Tuttavia, anche i potenziali modesti vantaggi teorici che l'illuminazione quantistica aveva rispetto all'illuminazione classica per il rilevamento dei bersagli sono rimasti una forte motivazione per sviluppare il concetto e più in generale, studiare i protocolli radar quantistici e le sue implementazioni pratiche e tecnologiche. L'obiettivo principale era la realizzazione di un radar quantistico, un traguardo non ancora raggiunto da un punto di vista di piena capacità tecnico-operativa.

Tutti i protocolli dei radar quantistici sono costruiti sfruttando proprietà non classiche della radiazione elettromagnetica, vale a dire entanglement quantistico e correlazioni quantistiche.

Secondo le caratteristiche e l'uso di entanglement, i sensori quantistici possono essere raggruppati in Tipo 1, Tipo 2 o Tipo 3:

- Sensori quantistici di tipo 1: il sensore quantistico trasmette stati quantistici della luce non entangled e non coerenti. Ciò include radar quantistici a fotoni singoli e LIDAR classici. Un esempio di un sensore di tipo 1 potrebbe essere un LIDAR che impiega fotoni squeezed per effettuare il rilevamento;
- Sensori quantistici di tipo 2: il sensore quantistico trasmette luce coerente (stati di luce classici), ma si utilizzano fotosensori quantistici per aumentare le prestazioni di rilevamento;
- Sensori quantistici di tipo 3: i sensori quantistici trasmettono stati di luce che sono originariamente entangled, di solito con il ricevitore, ma il raggio del segnale non è in uno stato entangled con se stesso;

- Sensori quantistici di tipo 4: il fascio del segnale è composto da stati di luce che sono entangled tra di loro. Un esempio potrebbe prevedere l'impiego del protocollo di quantum illumination che usa stati quantistici con fotoni multipli entangled.

Per focalizzarsi in maniera significativa sull'impiego del entanglement per la costruzione di un radar quantistico, saranno analizzati prevalentemente i sensori di tipo 3 e 4.

Un radar quantistico impiega protocolli di rilevamento quantistici basati sull'uso di sorgenti di fasci di fotoni entangled. In tali protocolli, si potrebbe avere una conservazione dell'entanglement fino alla ricezione del segnale riflesso e invece il caso in cui sebbene l'entanglement non sia presente tra il fotone idler e signal riflesso, si ottiene un vantaggio prestazionale in termini di sensibilità grazie alla correlazione non classica ereditata dalle proprietà degli stati entangled in fase di generazione. La scomparsa dell'entanglement è causato dall'attenuazione e dalla decoerenza dell'ambiente, la quale degrada totalmente la coerenza quantistica prima che il segnale arrivi al rivelatore.

L'entanglement quantistico è una proprietà fisica del concetto di superposizione lineare di stati relativamente ad un sistema complesso. Siccome la massima conoscenza di uno stato quantistico puro è fornita dalla conoscenza della sua funzione d'onda, uno stato è entangled se la funzione d'onda del sistema totale non determina le funzioni d'onda delle componenti dello stesso. La difficoltà peculiare nelle applicazioni che impiegano entanglement per migliorare la sensibilità nelle misurazioni quantistiche è che l'entanglement è una proprietà molto labile, facilmente corruttibile dall'ambiente circostante. La decoerenza quantistica è il processo tale per cui avviene la perdita di entanglement e, in generale, della superposizione quantistica (coerenza).

La quantum illumination conduce ad una formulazione delle probabilità di errore, tale che, nel caso di regime in pessime condizioni tra luce a singolo fotone ed illuminazione quantistica a singolo fotone sussisteva un incremento nell'esponente della funzione probabilità di errore pari a M , mentre nel caso di illuminazione quantistica gaussiana si assiste ad un incremento fisso massimo pari a 6dB rispetto ad una sorgente con luce a stato coerente. Ciò ha condotto a rivalutare la previsione di Lloyd di un incremento in regime ottimo di 60dB, poiché come si osserva nella comparazione tra CI e QI, l'incremento è definito, fisso ed indipendente da M .

$$P_r(e)_{SP} \leq \frac{e^{-\frac{N\kappa^2}{8N_B}}}{2} \quad (\text{per } \kappa \ll N_B) \quad (327)$$

$$P_r(e)_{QI} \leq \frac{e^{-\frac{N\kappa^2 M}{8N_B}}}{2} \quad \left(\text{per } \kappa \ll \frac{N_B}{M} \right) \quad (328)$$

$$P_r(e)_{CI} \leq \frac{e^{-\frac{M\kappa N_S}{4N_B}}}{2} \quad (\text{per } \kappa \ll 1, N_B \gg 1 \text{ e } N_S \ll 1) \quad (329)$$

$$P_r(e)_{QI} \leq \frac{e^{-\frac{M\kappa N_S}{N_B}}}{2} \text{ (per } \kappa \ll 1, N_B \gg 1 \text{ e } N_S \ll 1). \quad (330)$$

Inoltre, l'incremento massimo di 6dB è ottenibile solo tramite una strategia collettiva, ovvero allorquando tutti gli M modi possono essere misurati insieme; mentre usando una strategia locale (i modi sono misurati separatamente) il massimo vantaggio ottenibile nel rapporto segnale-rumore è 3dB. D'altra parte è stato mostrato che l'impiego di una illuminazione quantistica gaussiana con due modi squeezed è la condizione ottimale, nel senso che fornisce il massimo vantaggio rispetto all'illuminazione quantistica con stati coerenti.

Un elemento cruciale nello studio di un quantum radar consiste nella realizzazione di un ricevitore in grado di sfruttare il vantaggio espresso nella teoria dell'illuminazione quantistica. Nella misurazione in ricezione deve essere considerato che la conoscenza dell'osservabile indicante la presenza di un target è complessa, a causa del principio di indeterminazione di Heisenberg che non consente la simultanea misura e conoscenza delle quattro componenti di quadratura in cui l'osservabile può essere espanso:

$$\langle a_{Rm} a_{Im} \rangle_{H1} = \langle (\sqrt{\kappa} a_{Sm} + \sqrt{1-\kappa} a_{Bm}) a_{Im} \rangle_{H1}. \quad (331)$$

Un rilevamento alternativo consiste nella misurazione della cross correlazione non sensibile alla fase $\langle a_{Rm}^\dagger a_{Im} \rangle_{Hi}$, anche se per la teoria di Tan questa cross correlazione è sempre nulla a prescindere dalla presenza o meno del target. Si potrebbe inoltre considerare anche il conteggio diretto di fotoni, anche se esso non può aiutare a sfruttare il vantaggio teorico dell'illuminazione quantistica.

Al fine di realizzare il vantaggio insito nell'illuminazione quantistica, è necessario considerare una rilevazione con amplificatore ottico parametrico (OPA), ove si considera l'osservabile costituito dalla cross correlazione sensibile alla fase per la determinazione della presenza del target. La teoria di utilizzo di un OPA è basata sui principi della SPDC in modo inverso. Il valore atteso dell'operatore numero è il seguente:

$$N_T = \sum_{m=1}^M a_{Im}^{\dagger out} a_{Im}^{out}, \text{ con } a^{out} = \sqrt{G} a_{Im} + \sqrt{G-1} a_{Rm}^\dagger. \quad (332)$$

Il guadagno G del detector può essere scelto per ottimizzare le prestazioni della rilevazione. L'osservabile legato all'operatore numero differenzia la presenza o l'assenza di un target è determinato da cross correlazioni tutte misurabili: $\langle a_{Rm} a_{Im} \rangle_{Hi}$, $\langle a_{Rm} a_{Rm}^\dagger \rangle_{Hi}$ e $\langle a_{Im}^\dagger a_{Im} \rangle_{Hi}$. Per un OPA operante in un regime con elevata intensità del rumore di fondo, una bassa intensità del segnale ed una bassa riflettività del target, il limite Chernoff assume la seguente forma:

$$P_e(e)_{QI} \leq \frac{e^{-\frac{M\kappa N_S}{2N_B}}}{2}, \quad (333)$$

conducendo alla conclusione che il protocollo di ricezione OPA non è totalmente ottimo in quanto consente al massimo di raggiungere un vantaggio pari a 3dB, rispetto al caso con stato coerente.

Sfruttando il processo inverso di SPDC si può considerare un rilevamento basato sulla generazione somma frequenza SFG. Il ricevitore SFG raggiunge il limite ottimo nell'esponente della probabilità teorizzato da Tan. Comunque, i ricevitori SFG sono basati su differenti assunzioni ideali che non risultano raggiungibili con la tecnologia attuale. Il limite Chernoff raggiungibile da un ricevitore feed-forward SFG è il seguente:

$$P_e(e)_{QI} \leq \frac{e^{-\frac{M\kappa N_S}{N_B}}}{2}. \quad (334)$$

Una sperimentazione circa la comparazione prestazione di illuminazione quantistica gaussiana rispetto all'illuminazione coerente, il caso migliore dell'approccio classico, è stata condotta da Zhang. In tale esperimento un laser di pompa a 780 nm è stata impiegato nel processo SPDC per generare due fasci entangled a $\lambda_S = 1590 \text{ nm}$ e $\lambda_I = 1530 \text{ nm}$. In aggiunta, è stato inserito del rumore alla stessa frequenza del fotone signal. La ricombinazione del idler e del signal è rivelata tramite un detector OPA. Il miglioramento ottenuto dall'illuminazione quantistica rispetto all'illuminazione coerente è piuttosto modesto, dell'ordine del 20% nel rapporto segnale/rumore. La riduzione sull'efficienza tra i dati sperimentali e la teoria elaborata da Tan è giustificata dalle molteplici non idealità dello schema sperimentale e dalla procedura di rilevamento.

In generale, come comune denominatore degli esperimenti effettuati sull'illuminazione quantistica, si riportano i seguenti punti di interesse:

- il miglioramento nel SNR è maggiore per un basso numero medio di fotoni per modo, quando si raggiunge la condizione $N_S \ll 1$;
- la distanza del target è nota;
- le sperimentazioni principali sono state eseguite su lunghezze d'onda ottiche che è qualcosa di non praticabile per radar a lunghe distanze, sebbene si potrebbe associare all'utilizzo di un LIDAR o di applicazioni scanner non invasive, ad esempio quelle nel campo medicale.

Un altro problema riscontrato nel campo ottico è il fatto che il rumore di fondo è tendenzialmente basso, comportando che l'impiego di un radar ottico quantistico potrebbe essere impiegato per misurazioni anti-jamming. Tale limitazione non si verifica nel campo delle microonde dove vi è una forte intensità del rumore di fondo, consentendo di sfruttare i vantaggi offerti dall'illuminazione quantistica gaussiana rispetto al caso classico con stato coerente. In tale campo Barzanjeh propone

una sorgente ottica SPDC che generava due fotoni entangled, quello idler veniva memorizzato, mentre quello signal, tramite un processo elettro-optomeccanico, veniva convertito in microonde ed inviato nella regione di interesse. Dopo essere stato riflesso, tale fotone subiva un ulteriore processo di conversione EOM in campo ottico per effettuare una misurazione congiunta. La metodologia di rilevamento è di tipo eterodina. Bisogna considerare le perdite presenti all'interno del ricevitore, in cui per memorizzare il segnale idler tramite una linea di ritardo a fibra ottica con attenuazione pari a 0.2dB/km. Ciò implica che per mantenere il vantaggio teorico di 3dB la massima distanza raggiungibile dal radar è limitata a circa 11 km. Una possibile alternativa potrebbe essere l'impiego di memorie quantistiche, le quali risultano tuttora una tecnologia costosa e non praticamente implementabile all'interno di un quantum radar. Tuttavia in tale modo si potrebbe passare da un incremento da 3 a 6dB per il rilevamento a lunghe distanze. Inoltre bisogna considerare che l'attuale efficienza di conversione EOM è circa pari al 5%, che rappresenta un problema non trascurabile per mantenere le intensità sufficientemente elevate nelle applicazioni radar.

Sperimentazioni nell'ambito dell'illuminazione quantistica e del radar quantistico.

La tecnica di illuminazione quantistica prevede l'identificazione dei fotoni correlati signal riflessi e i fotoni di idler immagazzinati, al momento della rilevazione. Relativamente a differenti approcci ricevitori, come OPA e FF-SFG ciò richiede la preventiva conoscenza della distanza del target da identificare. Per queste motivazioni, l'impiego dell'illuminazione quantistica potrebbe trovare maggiori applicazioni nel campo medico per la costruzione di scanner biologici piuttosto che per tecnologie di identificazione della distanza di un target. Il vantaggio di una illuminazione quantistica rispetto a quella classica potrebbe essere maggiormente significativo ed implementabile per conoscere meglio la struttura di un possibile target, precedentemente individuato da altre tecnologie (come ad esempio un classico radar di scoperta).

Al fine di sviluppare una pratica applicazione radar è necessario innanzitutto poter generare una coppia di fotoni entangled nella banda delle microonde. Una primaria soluzione impiega cavità EOM, a scopo sperimentale. Di seguito si descrivono due tecniche principali che hanno consentito di replicare i principi insiti nel protocollo di illuminazione quantistica:

- conversione di frequenza: consiste nell'impiego di convertitori elettro-optomeccanici per passare dal dominio delle frequenze ottiche alle microonde e viceversa. Tali sistemi, grazie alla loro bi-direzionalità sono impiegati sia in fase di generazione del segnale che in fase di rilevamento. Tale tecnica, implementata in ambito di laboratorio in condizioni criogeniche, mostra alcuni svantaggi, principalmente connessi al basso livello di conversione frequenziale. Per applicazioni a distanze più elevate, si necessita di intense sorgenti SPDC;

- amplificazione Josephson: di recente si stanno utilizzando amplificatori parametrici Josephson (JPA) per ottenere una sorgente quantistica alle microonde per la costruzione di un quantum radar. La debolezza di tale tecnica risiede nelle basse temperature di funzionamento richieste al JPA per funzionare correttamente (7mK), oltre al fatto che i fasci generati da un JPA sono a bassa intensità e, quindi, non idonei ad applicazioni su lunghe distanze.

La generazione del segnale quantistico alla base di un radar resta una delle sfide maggiori per consolidarne l'architettura.

Un'ulteriore problematica tecnologica è insita nella memorizzazione del fotone idler, che risulta un parametro critico soprattutto per sistemi con applicazioni su lunghe distanze. In tale contesto la perdita di memorizzazione va correlata alla distanza massima raggiungibile al fine di non degradare il vantaggio teorico fornito dall'illuminazione quantistica ed espressa negli esponenti delle funzioni di probabilità errore. La proposta di impiegare memorie quantistiche potrebbe mitigare tale problematica poiché l'efficienza di tali dispositivi arriva sino al 89%, sebbene l'implementazione di memorie quantistiche in un radar quantistico è ancora un concetto del tutto teorico e strettamente correlato alla qualità della memoria utilizzata, oltre ad un'analisi costi-benefici.

Oltre ai problemi di perdita forniti dal mezzo nella propagazione elettromagnetica, va anche menzionato che il raggiungimento di un elevato prodotto banda-tempo è un fattore critico nel dominio delle microonde, rispetto al caso ottico. Il raggiungimento di un elevato prodotto banda-tempo è essenziale per il raggiungimento del vantaggio teorico offerto dall'illuminazione quantistica rispetto a quella classica.

Anche la superficie equivalente del target è un fattore cruciale per quantificare il reale vantaggio di tale tecnologia. I cosiddetti target Rayleigh-fading sono oggetti che presentano superfici non sufficientemente lisce, creando un segnale di ritorno con un'ampiezza distribuita con funzione Rayleigh e con una fase uniformemente distribuita. Ad esempio nel sistema di Tan si era assunto un valore noto dell'ampiezza e della fase di ritorno. Infatti il Rayleigh-fading degrada il vantaggio di 3dB offerto dal ricevitore OPA. Tale effetto propagativo si esplica in maniera maggiore alle frequenze ottiche piuttosto che alle microonde.

Esperimento di Luong:

È importante in tale contesto parlare della tecnica di illuminazione quantistica ibrida, ovvero una tecnica che impiega fotoni entangled per effettuare l'illuminazione di una porzione dello spazio e un meccanismo classico digitale basato su matching filter per la ricezione del fascio riflesso. In questo campo risulta opportuno analizzare un esperimento relativo all'impiego di un radar quantistico

basato su due modi squeezed, in cui il protocollo di illuminazione quantistica si basa sui seguenti step:

- produrre due segnali correlati nel rumore al JPA;
- uno dei segnali (il fascio idler) è amplificato e misurato immediatamente dopo la sua generazione impiegando tecniche classiche, in cui la componente in fase ed in quadratura del idler vengono misurate e memorizzate;
- il fascio signal è amplificato ed inviato per esplorare una regione spaziale dove potrebbe essere presente un target;
- il fascio riflesso e ricevuto viene misurato come effettuato per quello idler;
- la rilevazione è decisa se l'uscita del rilevatore, basato su una tecnica di matching filter, supera un certo valore di soglia.

Questo esperimento viene effettuato per due differenti tipologie di radar: un radar a due modi di rumore (TMN) e un radar a due modi di stati quantistici squeezed (QTMS). La differenza tra il TMN e il QTMS è nella generazione del segnale, infatti nel caso di QTMS la sorgente è costituita da un JPA che genera due fotoni entangled alle frequenze $\omega_1(signal) = 7.5376GHz$ e $\omega_2(idler) = 6.1445GHz$. A seguito della generazione i segnali sono amplificati. Il processo di amplificazione introduce rumore e quindi una perdita dell'entanglement. A questo punto è fondamentale introdurre una definizione pragmatica di fasci entangled, basata sulla corrispondente matrice di correlazione, in cui si verifica se i termini di correlazione sono maggiori rispetto al paritetico caso di fasci correlati classicamente. Tale definizione è differente dal concetto teorico di entanglement definito nella meccanica quantistica, conducendo verso un concetto di correlazione quantistica rispetto a quello di una correlazione classica. Il segnale in uscita a JPA ha una potenza pari a -145.43dBm e prima di essere inviato ad una antenna a tromba, viene amplificato sino a raggiungere una potenza di -82dBm. Il segnale riflesso viene ricevuto e misurato con un approccio eterodino e comparato con il fotone idler a seguito di una digitalizzazione impiegando tecniche di filtraggio (ADC).

Per il radar TMN si effettua una generazione del segnale tramite una portante a 6.84105GHz, la quale viene mescolata con un rumore gaussiano con una banda di 5MHz e centrato a 0.69655GHz. il risultato è la generazione di due segnali a $\omega_1(signal) = 7.5376GHz$ e $\omega_2(idler) = 6.1445GHz$, come nel caso del radar QTMS. I segnali subiscono gli stessi processi di propagazione, amplificazione e memorizzazione del caso quantistico. Il segnale che giunge all'antenna ha una potenza totale di -63dBm, avente un SNR=-19dB, tale per cui la potenza del rumore gaussiano risulta essere pari a -82dBm, equivalente a quella del QTMS.

L'amplificatore di ricezione dopo l'antenna a tromba presenta un guadagno di 25dB. Le antenne sono state separate ad una distanza di 0.5m, senza interporre alcun oggetto nel mezzo. Per questa motivazione, sebbene tale esperimento impiega una tecnica di illuminazione quantistica ibrida, tale esperimento non può essere propriamente assimilabile al funzionamento di un radar.

Le funzioni dei rilevatori considerati da Luong nel summenzionato esperimento sono costruite dalle tensioni in fase ed in quadratura del segnale 1 (fotone signal) e del segnale 2 (fotone idler). Si consideri il vettore a 4 dimensioni:

$$x^T = (I_1, Q_1, I_2, Q_2). \quad (335)$$

Quando i due segnali sono generati, la relativa matrice di covarianza assume questa forma:

$$E[xx^T](0) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}(0) \\ R_{21}(0) & R_{22} \end{pmatrix}, \quad (336)$$

dove ogni elemento R_{ij} è una matrice 2x2. Nel caso di condizioni di segnali stazionari, i blocchi matriciali R_{11} e R_{22} non dipendono dal tempo. Dopo una certa evoluzione temporale, la matrice di covarianza assume la seguente forma:

$$E[xx^T](t) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}(t) \\ R_{21}(t) & R_{22} \end{pmatrix}. \quad (337)$$

All'interno degli elementi anti-diagonali è codificata l'informazione della presenza o assenza del target, in quanto quelli diagonali sono legati principalmente al numero medio di fotoni e non presentano informazioni di cross correlazione.

I risultati ottenuti da questo esperimento sono stati graficati in termini di ROC in funzione della probabilità di rilevamento e della probabilità di falsi allarmi, per differenti numeri di coppie di fotoni rilevati, effettuando una comparazione tra le prestazioni del QTMS e del TMN. Le prestazioni maggiori del QTMS potrebbero consentire di ridurre il tempo operativo di un fattore 8 rispetto al caso TMN. In questo esperimento è importante contestualizzare che il target può essere posto nell'area di interesse a temperatura ambiente, mentre il JPA necessita di una condizione criogenica (7mK) per funzionare correttamente, in quanto è molto sensibile al rumore. Alle temperature criogeniche si è in grado di produrre uno stato di vuoto a frequenze superiori a 4 GHz. Come sintesi dell'esperimento ivi descritto si riportano le immagini e i grafici principali per consentire una maggiore comprensione di quanto precedentemente riportato.

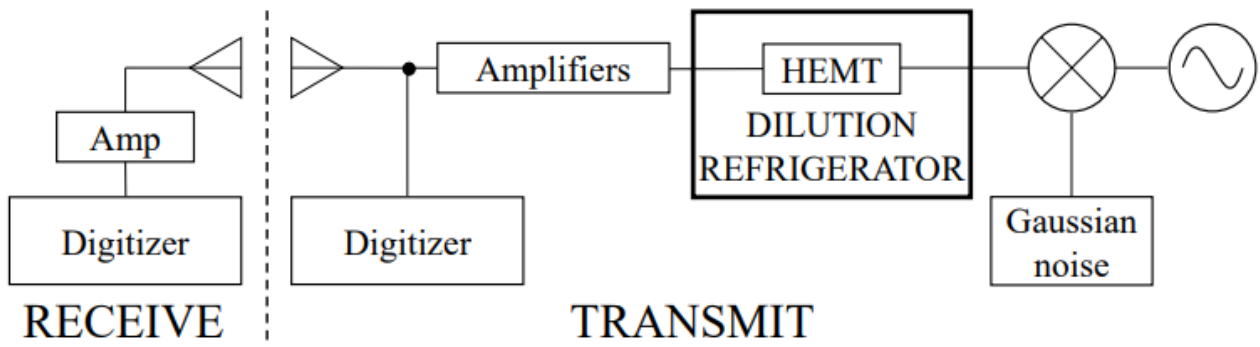


Figura 16: Diagramma a blocchi del radar a doppio modo TMN, un semplice radar classico che approssima le operazioni del prototipo del radar quantistico relativo all’esperimento in parola.

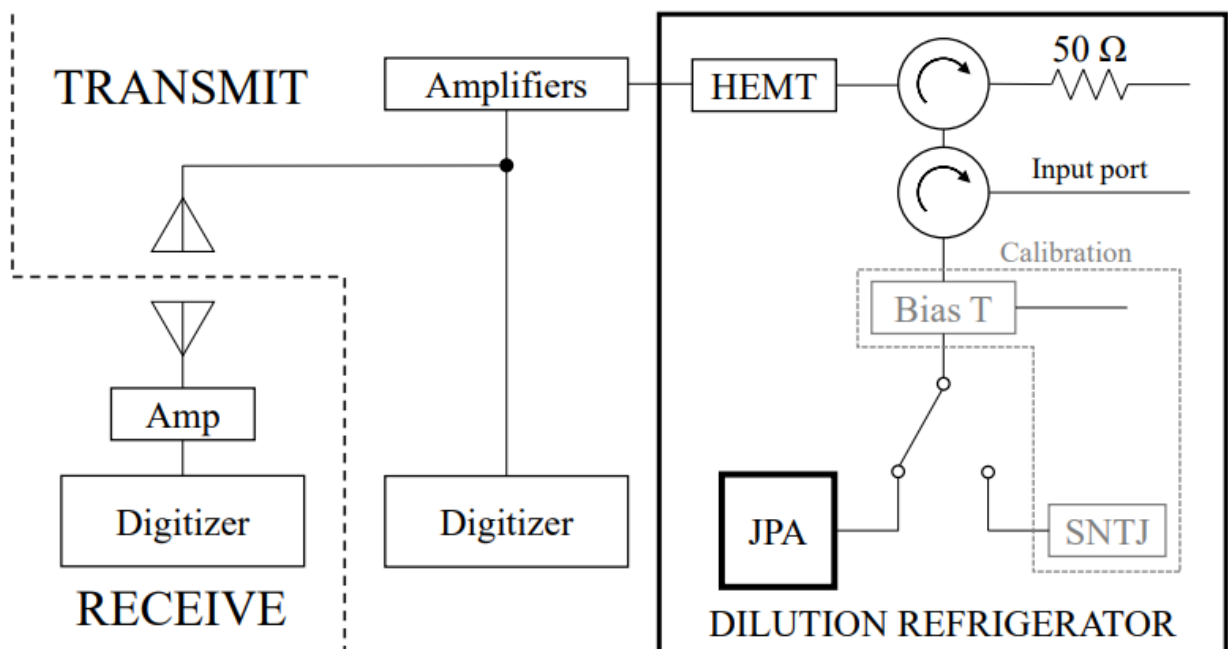


Figura 17: Diagramma a blocchi semplificato del radar quantistico. La sorgente JPA genera il segnale entangled che viene amplificato ed inviato all’antenna a tromba.

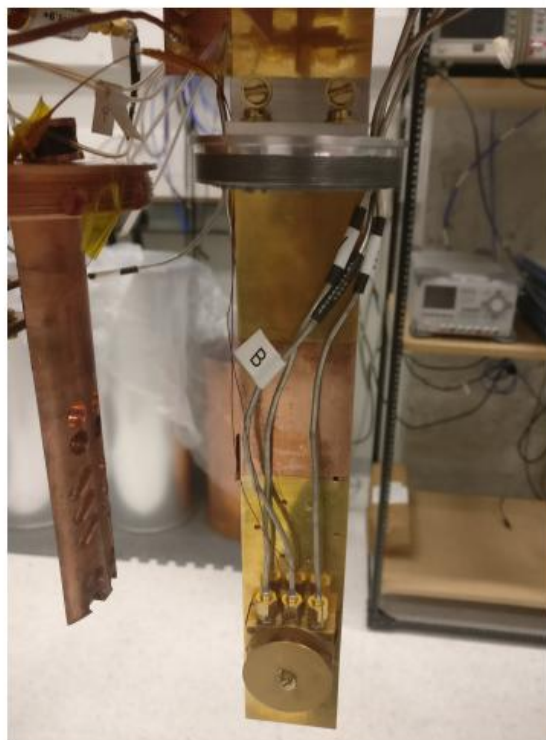
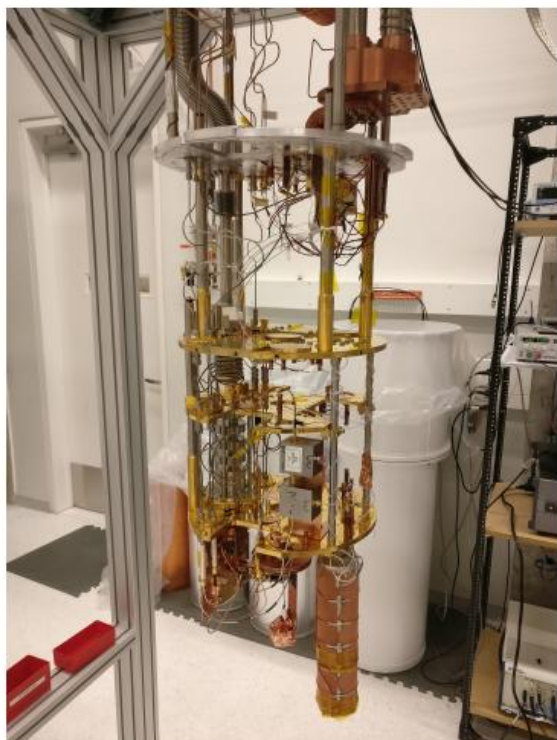


Figura 18: Particolare del refrigeratore. Dall'alto verso il basso ogni piatto circolare è più freddo dell'ultimo. La bobina esterna posta sopra il JPA produce il campo magnetico statico utile al funzionamento del JPA.

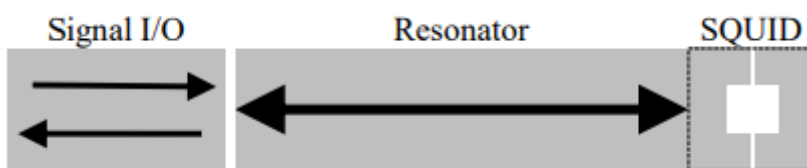
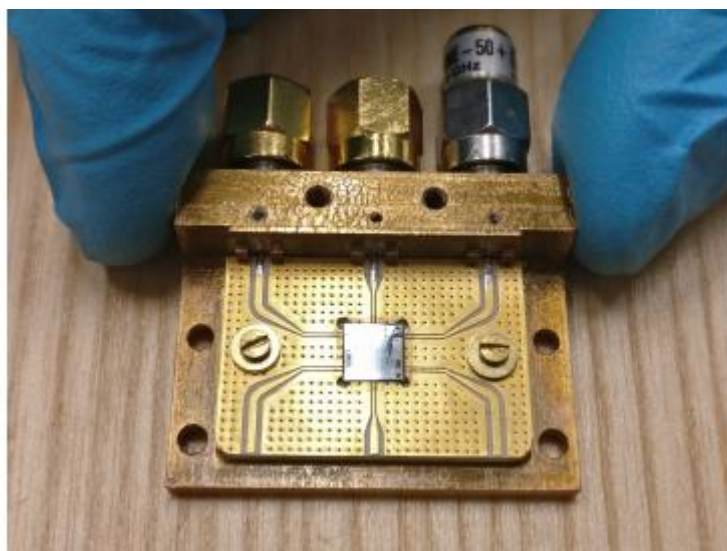


Figura 19: Amplificatore parametrico Josephson (JPA) montato su una circuito stampato e diagramma semplificato del JPA.

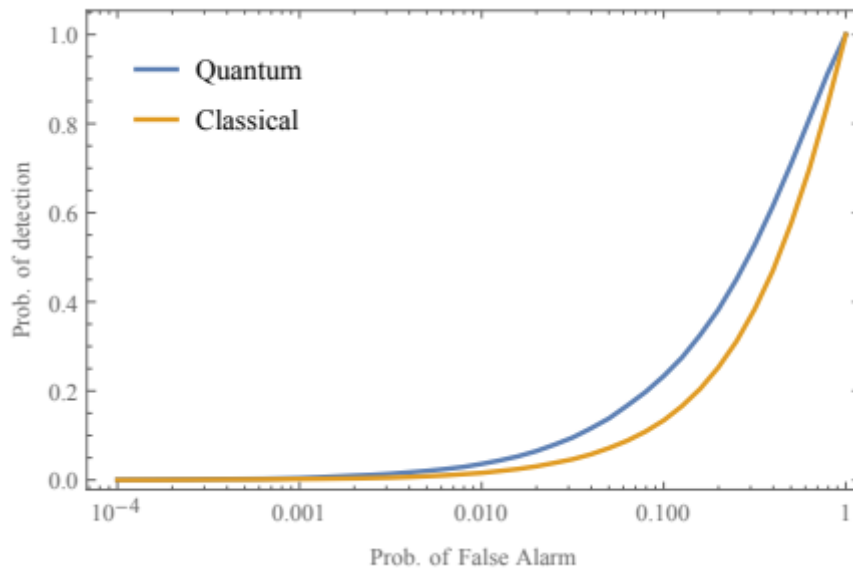


Figura 20: Curve di ROC per il radar QTMS e TMN, entrambi operanti a -82dBm, usando un'integrazione a 1000 campioni.

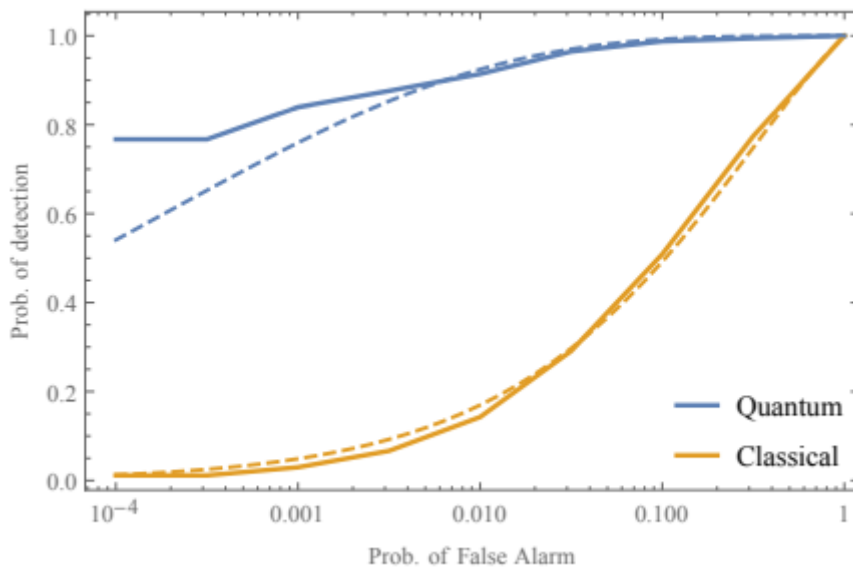


Figura 21: Curve ROC per il radar QTMS e TMN con integrazione a 50000 campioni, in cui le curve tratteggiate rappresentano l'andamento analitico teorico delle figure ROC.

Esperimento di Barzanjeh:

L'esperimento di Barzanjeh consiste nella comparazione dell'illuminazione quantistica rispetto all'illuminazione con stato coerente a parità di condizioni e di specifiche. Gli elementi di interesse dell'illuminazione quantistica in questo tipo di esperimento sono:

- i fasci a microonde entangled sono generate direttamente dalla sorgente JPA;

- il fascio idler è misurato usando una rilevazione eterodina e memorizzato a seguito della sua amplificazione;
- in parallelo, dopo l'amplificazione, il fascio signal è inviato per rilevare se un target è presente in una specifica regione spaziale;
- vengono implementate tecniche digitali classiche nel rilevamento e nella memorizzazione del fascio ricevuto;
- la procedura di rilevamento si basa su una misurazione delle componenti di quadratura a seguito di un matched filter per comparare entrambi i segnali. La procedura consente di implementare un ricevitore a coniugazione di fase che sfrutta pienamente le correlazioni dei due segnali senza una foto riduzione.

Relativamente all'illuminazione classica, la procedura è la stessa, con le medesime condizioni di temperatura, energia e potenza per la generazione del fotone idler e signal rispetto al caso di illuminazione quantistica. Differenti sorgenti di rumore sono state aggiunte per simulare il rumore introdotto nel processo di amplificazione dell'illuminazione quantistica (introdotto durante il processo di amplificazione). Comunque l'esperimento non mostra significativi benefici rispetto al caso classico dove il caso migliore si ottiene con l'impiego di uno stato coerente, in cui è stata realizzata una rilevazione sia omodina sia eterodina. In questo esperimento il target è posto a 1m, ad una distanza fissa dall'antenna ricevente e a temperatura ambiente. La generazione con JPA e l'amplificazione è effettuata in condizioni criogeniche. La generazione dei modi alle microonde avviene infatti a 7mK. Le frequenze dei fotoni entangled sono $\omega_1(signal) = 10.09\text{ GHz}$ e $\omega_2(idler) = 6.8\text{ GHz}$ e, per l'illuminazione quantistica si è scelto $M=380000$, mentre per gli esperimenti con luce coerente $M=192000$. L'esperimento ha mostrato un miglioramento delle prestazioni in termini di SNR nel caso di illuminazione quantistica, rispetto ad uno schema di illuminazione classica, secondo gli elementi di seguito descritti:

- l'esperimento ha dimostrato sino a 3dB di guadagno nel SNR in regime di bassa intensità rispetto ad una illuminazione classica sub-ottima e simmetrica;
- partendo dal presupposto di un perfetto rilevamento di un numero di fotoni idler, il vantaggio dell'illuminazione quantistica è fino a 4dB, abbattendo anche il limite offerto dall'illuminazione coerente con rilevamento eterodino, che non richiede l'informazione di coniugazione di fase;
- non si sono verificati vantaggi nel SNR per luce coerente usando sia il rilevamento omodino sia eterodino;
- per segnali con un numero di fotoni maggiore di 4.5, non si verificano vantaggi con l'impiego di stati entangled rispetto all'impiego di luce classica non entangled.

Nella regione di $N_s < 0.4$, i risultati dell'esperimento hanno dedotto che il guadagno in termini di SNR dell'illuminazione quantistica rispetto alla rilevazione omodina usando luce coerente è stato 1dB usando un ricevitore a coniugazione di fase rispetto all'illuminazione con luce coerente usando una rilevazione omodina. Tale risultato è minore rispetto al vantaggio teorico (3dB), ma in accordo con il fatto che quando sono presenti delle non idealità, il vantaggio teorico previsto viene ridotto. Come sintesi dell'esperimento ivi descritto si riportano le immagini e i grafici principali per consentire una maggiore comprensione di quanto precedentemente riportato.

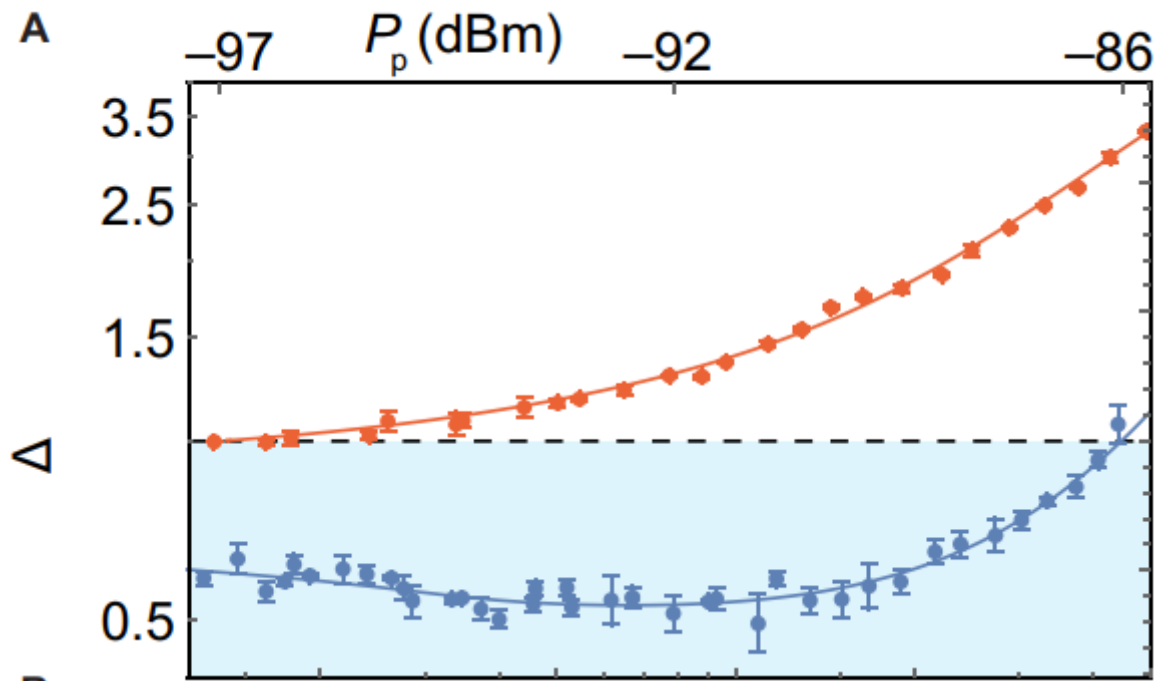


Figura 22: Il parametro che misura l'entanglement Δ in uscita al convertitore parametrico Josephson JPC (blu) e rumore classico correlato (arancione), in funzione del numero medio di fotoni di fotoni in uscita al JPC e della potenza di ingresso del segnale di pompa in ingresso al JPC.

Il valore di entanglement viene misurato con valori $\Delta < 1$.

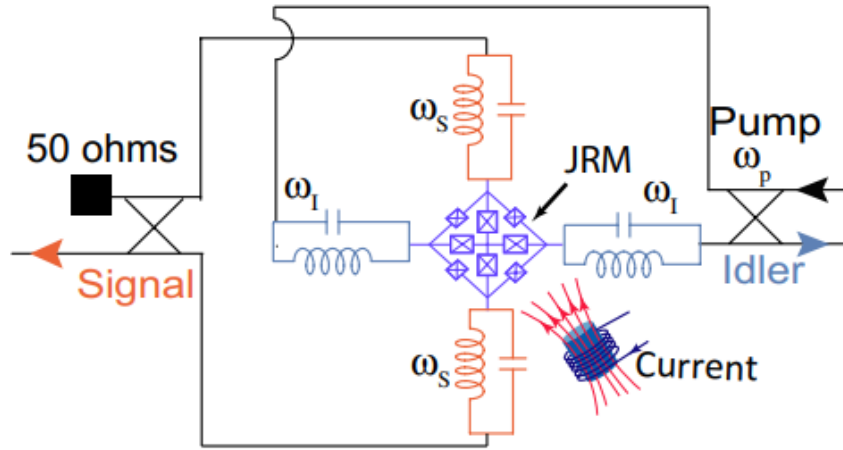


Figura 23: JPC contenente un modulatore Josephson ad anello (JRM) consistente di 4 giunzioni Josephson piccole e 4 giunzioni Josephson più grandi che fungono da induttanze shunt all'interno del modulatore. Due risonatori a microonde sono accoppiati al modulatore JRM per formare i risonatori signal e idler con frequenze di risonanza rispettivamente di ω_s e ω_l . Questi risonatori sono capacitivamente accoppiate alle porte di ingresso e di uscita. Per usare il JPC in una condizione di miscelamento a tre onde, il dispositivo è polarizzato usando un campo magnetico esterno ed un segnale di pompa alla frequenza $\omega_p = \omega_s + \omega_l$. In questa configurazione la seconda porta del segnale è terminata usando una terminazione a 50 Ohm.

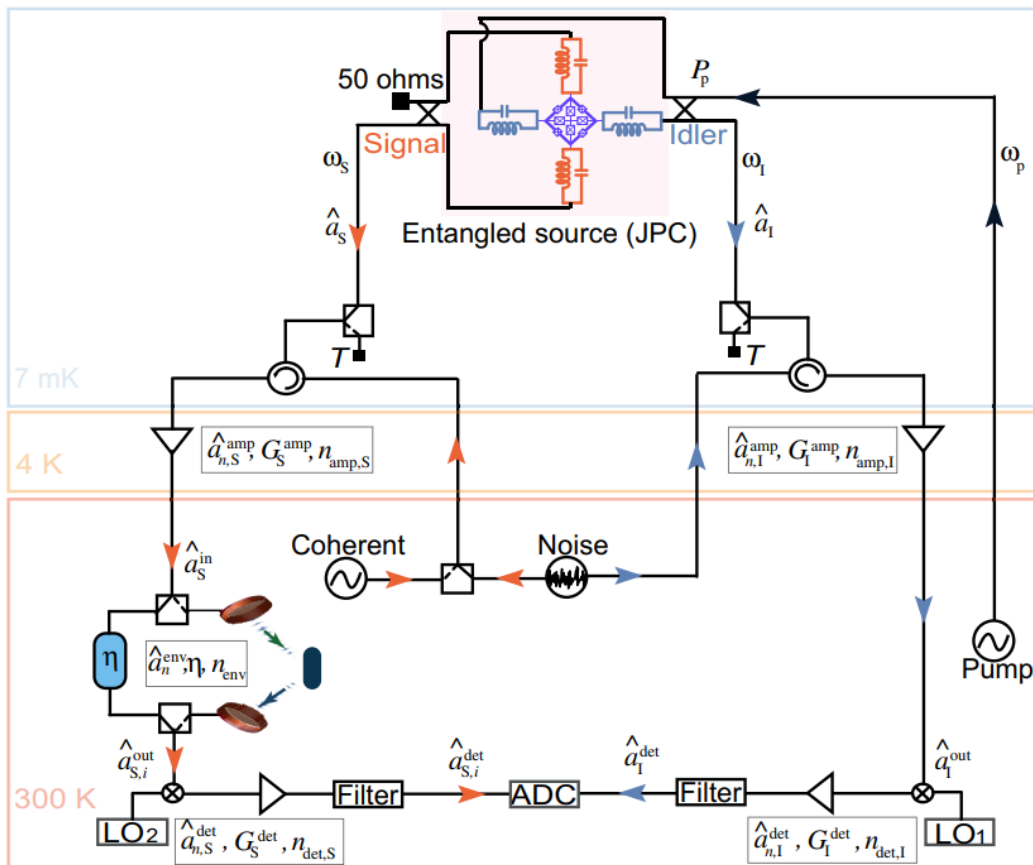


Figura 24: I segnali di uscita del JPC sono amplificate in differenti step prima di essere down convertiti a 20 MHz usando due oscillatori locali. A seguito della down conversion, i segnali sono filtrati ed amplificati prima di essere digitalizzati usando un convertitore analogico-digitale. L'illuminazione classica viene effettuata usando un rumore bianco correlato generato con un trasmettitore arbitrario di forme d'onda. Per l'illuminazione con stato coerente, il tono coerente generato viene inviato al refrigeratore. Il segnale è riflesso dal JPC in assenza di segnale di pompa per poi passare attraverso la catena di misurazione.

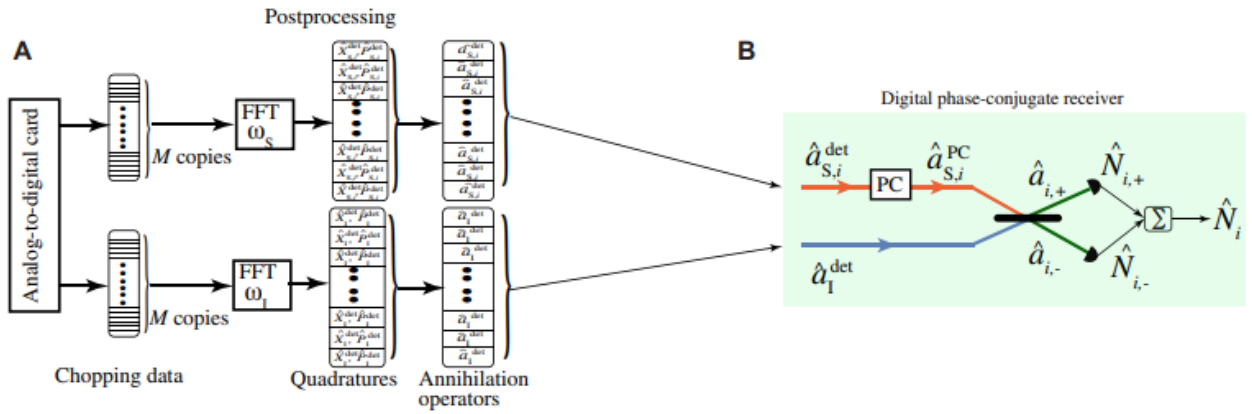


Figura 25: I dati memorizzati dal ADC vengono suddivisi in M vettori più piccoli. A questi si applica una FFT digitale alle frequenze del signal e del idler dopo una down conversion analogica su ogni vettore per le misure statistiche sui modi signal e idler di quadratura. I segnali di quadratura sono impiegati per calcolare gli operatori di annichilazione per le matrici di covarianza. Il ricevitore digitale a congiunzione di fase è usato per ricavare il rapporto segnale-rumore del CI e del QI. Il beam splitter 50:50 miscela il segnale riflesso a congiunzione di fase con il segnale idler localmente rilevato. Le uscite del beam splitter sono rilevate e corrispondenti agli operatori quantistici $\sum_{k=1}^M N_{i,\pm}$ (incluse tutte le M copie del segnale), le cui differenze delle uscite sono usate come ingressi ad un rilevatore a soglia, la cui uscita corrisponde alla decisionalità circa l'assenza o la presenza del target.

Il JPA consente anche di generare segnali a banda stretta con una specifica modulazione, a differenza del SPDC e per questo si potrebbe utilizzare tale modulazione per identificare oggetti a velocità ridotta, combinando i risultati con le tecniche Doppler standard utilizzate in applicazioni analoghe.

Mentre per l'illuminazione quantistica i fasci di fotoni hanno bisogno della stessa intensità, in quella con luce coerente le intensità di signal e idler può essere arbitrariamente distribuita. Considerando un radar quantistico e classico correlato si ha che le corrispondenti matrici di correlazioni mostrano un'interazione tra le intensità di idler e signal che implica la possibilità di

superare le condizioni di sensibilità. Gli M modi della misura (misure eterodine) sono un set di misure indipendenti, egualmente distribuite, vettori di valori complessi randomici, le cui componenti di quadratura hanno una distribuzione gaussiana a media zero. Le matrici di covarianza possono essere scritte nel seguente modo, considerando $x^T = \left(a_{Rm}, \frac{\sqrt{N_S+1}}{\sqrt{G_A}} a_{Im}^* \right)$ (338), dove G_A è il coefficiente di guadagno di pre-amplificazione - $N_R = \kappa N_S + N_B$ (339):

$$E_{\kappa, \theta}^{QCN}[xx^T] = \begin{pmatrix} N_R + N_F & 0 & \sqrt{\kappa N_S} \cos(\theta) & -\sqrt{\kappa N_S} \sin(\theta) \\ 0 & N_R + N_F & \sqrt{\kappa N_S} \sin(\theta) & \sqrt{\kappa N_S} \cos(\theta) \\ \sqrt{\kappa N_S} \cos(\theta) & \sqrt{\kappa N_S} \sin(\theta) & 1 + \frac{N_F-1}{N_S+1} & 0 \\ -\sqrt{\kappa N_S} \sin(\theta) & \sqrt{\kappa N_S} \cos(\theta) & 0 & 1 + \frac{N_F-1}{N_S+1} \end{pmatrix}, \quad (340)$$

$$E_{\kappa, \theta}^{CCN}[xx^T] = \begin{pmatrix} N_R + N_F & 0 & \sqrt{\kappa N_S} \cos(\theta) & -\sqrt{\kappa N_S} \sin(\theta) \\ 0 & N_R + N_F & \sqrt{\kappa N_S} \sin(\theta) & \sqrt{\kappa N_S} \cos(\theta) \\ \sqrt{\kappa N_S} \cos(\theta) & \sqrt{\kappa N_S} \sin(\theta) & 1 + \frac{N_F}{N_I} & 0 \\ -\sqrt{\kappa N_S} \sin(\theta) & \sqrt{\kappa N_S} \cos(\theta) & 0 & 1 + \frac{N_F}{N_I} \end{pmatrix}. \quad (341)$$

Va notato che sia N_I , N_S e N_F sono variabili indipendenti. Per questo motivo vi sono alcuni regimi di funzionamento in cui l'approccio classico supera quello quantistico:

- per $N_I \rightarrow \infty$ e $N_F = 1$ (detector ideale), le matrici di covarianza diventano uguali e quindi le prestazioni del CCN e del QCN si eguagliano;
- se $N_F > 1$, le prestazioni del radar a correlazione classico superano quelle quantistiche quando la condizione $1 + \frac{N_F-1}{N_S+1} > 1 + \frac{N_F}{N_I}$ è verificata. Questo avviene quando il segnale idler ha una certa intensità, in cui il risultato non dipende dalla riflettività:

$$N_I > N_F \frac{N_S+1}{N_F-1}. \quad (342)$$

Sulla base di questa analisi, condotta da Shapiro, la diretta conseguenza è che lo schema di un radar quantistico ibrido con rilevazione eterodina non può universalmente superare un radar a luce coerente funzionante con un segnale alla stessa intensità e sotto le medesime capacità di rilevamento.

Considerazioni e comparazioni sull'approccio classico e quantistico

Da quanto sinora trattato, si evince che una delle più significative limitazioni di un radar quantistico, sia la conoscenza a priori della distanza del target. Recentemente un protocollo adottato da Maccone-Ren coinvolge fotoni in uno stato entangled per la costruzione di un dispositivo di tipo 4, relativamente ai sensori quantistici descritti precedentemente. In tale tecnica si prepara uno stato

con N fotoni entangled, i quali vengono tutti inviati nella regione di interesse per discernere circa la presenza di un oggetto e, invece, il rumore viene trattenuto come idler. Lo stato entangled nel protocollo di Maccone-Ren ha la seguente forma:

$$|\psi_N\rangle = \int d\omega d\bar{k} \psi(\omega, \bar{k}) \left(a^\dagger(\omega, \bar{k}) \right)^N |0\rangle, \quad (343)$$

in cui $\bar{k}$ rappresenta il momento trasverso e la propagazione di ognuno di questi fotoni avviene lungo l'asse z e con lo stesso momento. Vi sono problematiche pratiche di realizzazione del protocollo di Maccone-Ren. In primo luogo sussiste una difficoltà nella generazione di stati entangled multipli, in quanto il beneficio offerto da tale tecnica avviene per N molto grande. Con l'aumento di N vi è maggiore difficoltà di produrre stati entangled. In secondo luogo deve essere considerata l'arbitrarietà di distribuzione e di arrivo temporale di N fotoni entangled, il che richiederebbe un tempo infinito di rilevazione e un'infinita grandezza del detector. Ciò viene risolto impiegando stati parzialmente entangled, i quali sono anche più semplici da generare in un processo SPDC, mostrando ancora dei vantaggi rispetto a stati a protocollo classico. Infine, un'altra problematica risiede nell'elevata sensibilità al rumore di tali stati, in quanto la perdita di uno solo degli N fotoni entangled, renderebbe gli altri $(N-1)$ fotoni inutilizzabili, perché il loro rilevamento avviene in un tempo del tutto arbitrario.

In generale, i protocolli per un radar quantistico impieganti fotoni multipli entangled potrebbero consentire di sfruttare il vantaggio prestazionale teorico, in quanto i fotoni sono correlati nel tempo (la generazione di fotoni multipli avviene nello stesso istante di tempo), in frequenza e nel momento, rispettando il principio di phase-matching. Alla base di questa tecnologia va definito il criterio di rilevamento positivo di un target. In tal caso, il target è presente se il fotone (o i fotoni) signal vengono rilevati nella banda di frequenza di quest'ultimo e il fotone idler è rilevato nello stesso istante temporale in una misurazione congiunta. Il dimensionamento della finestra di ricezione è un parametro critico in quanto la stessa non può essere troppo larga, altrimenti il rumore connesso a fotoni non correlati diventa elevato, né troppo stretta, altrimenti si rischierebbe di non rilevare il fotone riflesso.

Quando il target è assente e l'illuminazione avviene con un campo non entangled, lo stato quantistico è descritto dalla seguente matrice densità:

$$\rho_0 \approx \{(1 - MN_B)|0\rangle\langle 0| + N_B \sum_{k=1}^M |a^\dagger(\omega_1, \bar{k}_1)|0\rangle\langle 0| a(\omega_1, \bar{k}_1)|\}. \quad (344)$$

Di seguito vengono presentate le peculiari trattazioni matematiche fondanti i concetti di illuminazione quantistica sinora descritti.

$$|\psi\rangle_{sa} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=1}^M |k\rangle_s \otimes |k\rangle_a: \quad (345)$$

stato entangled di Lloyd per l'illuminazione quantistica con $M=TW \gg 1$, in cui un aspetto principale della teoria è che $M \gg 1$ per ottenere un miglioramento di sensibilità.

$$|\psi\rangle_{sa} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=1}^M |k\rangle_s: \quad (346)$$

stato di Lloyd per l'illuminazione quantistica coerente.

$$|\psi_m\rangle_{sa} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{N_s^n}{(1+N_s)^{n+1}}} |n\rangle_{sm} \otimes |n\rangle_{am}: \quad (347)$$

stato quantistico gaussiano nell'illuminazione quantistica di Tan. $M = WT > 1$ modi signal-idler dove W è la banda nel SPDC phase-matching.

$$V^{SI} = \langle (a_s a_I a_s^\dagger a_I^\dagger)^T (a_s^\dagger a_I^\dagger a_s a_I) \rangle = \begin{pmatrix} N_s + 1 & 0 & 0 & \sqrt{N_s(N_s + 1)} \\ 0 & N_s + 1 & \sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 \\ 0 & \sqrt{N_s(N_s + 1)} & N_s & 0 \\ \sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 & 0 & N_s \end{pmatrix}: \quad (348)$$

matrice di covarianza dello stato gaussiano trattato nella teoria di Tan.

$$|\psi_m\rangle_s = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{N_s^n e^{-N_s}}{n!}} |n\rangle_{sm}: \quad (349)$$

stato coerente della teoria di Tan.

Illuminazione con luce non entangled:

$$\rho_0 \approx \{(1 - MN_B)|0\rangle\langle 0| + N_B \sum_{k=1}^M |k\rangle_n \langle k|_n\}: \quad (350)$$

matrice densità del sistema signal-idler in condizione di target assente, nella teoria di Lloyd.

$p_0(+)$ = N_B : probabilità di un falso positivo; $p_0(-) = 1 - p_0(+) = 1 - N_B$: probabilità corretta nel caso di target non presente.

$$\rho_1 = (1 - \kappa)\rho_0 + \kappa\tilde{\rho} \approx (1 - \kappa)\{(1 - MN_B)|0\rangle\langle 0| + N_B \sum_{k=1}^M |k\rangle_n \langle k|_n\} + \kappa|\psi\rangle_s \langle \psi|_s: \quad (351)$$

matrice densità in condizione di target presente in funzione dello stato signal mandato nella regione di interesse e della riflettività del target.

$$p_1(+) = (1 - \kappa)N_B + \kappa: \quad (352)$$

probabilità di misurare l'arrivo del fotone.

$$p_1(-) = 1 - p_1(+) = 1 - ((1 - \kappa)N_B + \kappa) = (1 - \kappa)(1 - N_B): \quad (353)$$

probabilità di un falso negativo.

$$SNR_{QI} = \frac{p_1(+)}{p_0(+)} = \frac{((1-\kappa)N_B + \kappa)}{N_B}: \quad (354)$$

rapporto segnale-rumore.

Illuminazione con luce entangled:

$$\rho_{0^e} \approx \{(1 - MN_B)|0\rangle\langle 0| + N_B \sum_{k=1}^M |k\rangle_n \langle k|_n\} \otimes \left(\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |k\rangle_A \langle k|_A\right): \quad (355)$$

matrice densità del sistema signal-idler in condizione di target assente, nella teoria di Lloyd, ove

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |k\rangle_A \langle k|_A \quad (356)$$

rappresenta lo stato idler, mentre ρ_0 rappresenta la distribuzione di probabilità di rilevare un fotone dovuto esclusivamente al rumore.

$$p_{0^e}(+) = \frac{N_B}{M}: \quad (357)$$

probabilità di un falso positivo per un unico rilevamento;

$$p_0^e(-) = 1 - \frac{N_B}{M}: \quad (358)$$

probabilità corretta nel caso di target non presente.

$$\rho_1^e = (1 - \kappa)\rho_0^e + \kappa\rho_s: \quad (359)$$

matrice densità in condizione di target presente relativamente al sistema signal-idler entangled in funzione della matrice densità del fotone signal.

$$p_1^e(+) = \frac{(1-\kappa)N_B}{M} + \kappa: \quad (360)$$

probabilità di rilevamento del fotone.

$$p_1^e(-) = 1 - p_1^e(+) = (1 - \kappa)\left(1 - \frac{N_B}{M}\right): \quad (361)$$

probabilità di un falso negativo (non rilevamento).

$$p_1^e(+, m) = \left(\frac{(1-\kappa)N_B}{M} + \kappa\right)^m: \quad (362)$$

probabilità di rilevamento del fotone nel caso di m esperimenti indipendenti.

$$p_1^e(-, m) = (1 - \kappa)^m \left(1 - \frac{N_B}{M}\right)^m : \quad (363)$$

probabilità di un falso negativo (non rilevamento) nel caso di m esperimenti indipendenti.

$$SNR_{QI}^e = \frac{p_{1e}(+)}{p_{0e}(+)} = \frac{M \left(\frac{(1-\kappa)N_B}{M} + \kappa \right)}{N_B} : \quad (364)$$

rapporto segnale-rumore relativo alla teoria di Lloyd con stati entangled. Confrontando i rapporti segnale-rumore della teoria di illuminazione quantistica con e senza stati entangled risulta chiaro un miglioramento delle prestazioni in termini di numero di modi M.

Sezione ricevente

La sezione ricevente di un radar sia esso classico o quantistico è un elemento cruciale per comprendere le prestazioni ed il funzionamento del dispositivo. In tale contesto, si riportano differenti architetture per la costruzione di una sezione ricevente di un radar quantistico, affrontando la suddetta analisi in ottica anche comparativa con il corrispettivo classico.

Strategie di rilevamento

Criterio di Neyman-Pearson

La strategia di decisione Bayesiana, che ha lo scopo di minimizzare la probabilità di errore medio, non rappresenta un adeguato strumento nel caso in cui differenti tipologie di errore non hanno la stessa importanza, come avviene in una applicazione per l'individuazione di un target. Nel campo militare, ad esempio, un falso allarme è maggiormente tollerabile rispetto ad un mancato rilevamento del target. In tale contesto è necessario introdurre la strategia decisionale Neyman-Pearson, in cui la decisionalità avviene sulla base di un superamento di una soglia λ , la quale non richiede alcuna assunzione a priori sulle ipotesi di probabilità. Le prestazioni di un test Neyman-Pearson si valutano generalmente studiando l'andamento della probabilità di rilevamento in funzione della probabilità di falso allarme. Tale curva è nota come caratteristica operativa del ricevitore (ROC) e contiene tutte le informazioni necessarie a determinare il punto di funzionamento ottimale di un detector. Tale strategia va applicata al mondo quantistico per contestualizzarla al funzionamento di un radar quantistico. Si definiscono:

$$P_F = \text{Tr}(E_1 \rho_0) - \text{probabilità di falso allarme}; \quad (365)$$

$$P_M = \text{Tr}(E_0 \rho_1) - \text{probabilità di mancato rilevamento} \quad (366)$$

$$P_D = 1 - P_M = \text{Tr}((1 - E_0) \rho_1) = \text{Tr}(E_1 \rho_1) - \text{probabilità di rilevamento}, \quad (367)$$

con E_1 e E_0 definiti come operatori di misurazione tale che $E_0 + E_1 = I$. a questo punto dato un valore fisso $P_F = \alpha$, bisogna trovare l'operatore E_1 che massimizza la probabilità di rilevamento.

$$\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|, \rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \text{ e } \langle\psi_1|\psi_0\rangle = \beta. \quad (368)$$

L'operatore E_1 deve essere il proiettore della parte positiva di $(\rho_1 - \lambda \rho_0)$ e per tale calcolo bisogna trovare l'equazione dell'autovale:

$$(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| - \lambda |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle. \quad (369)$$

Moltiplicando a sinistra per $\langle\psi_1|$ e $\langle\psi_0|$ si trova un sistema di equazioni:

$$\beta^* \langle \psi_1 | \eta \rangle - (\eta + \lambda) \langle \psi_0 | \eta \rangle = 0, \quad (370)$$

$$(1 - \eta) \langle \psi_1 | \eta \rangle - \beta \langle \psi_0 | \eta \rangle = 0, \quad (371)$$

che conduce alle soluzioni:

$$\eta_{1/0} = \frac{1}{2} (1 - \lambda) \pm R, \text{ con } R = \sqrt{\frac{(1-\lambda)^2}{4} + \lambda h} \text{ e } h = 1 - |\beta|^2. \quad (372)$$

Il criterio di Neyman-Pearson ci suggerisce di definire $E_{0/1} = |\eta_{0/1}\rangle \langle \eta_{0/1}|$, ottenendo che:

$$P_F = |\langle \psi_0 | \eta_1 \rangle|^2 = \frac{\eta_1 - h}{2R}, \quad (373)$$

$$P_D = |\langle \psi_1 | \eta_1 \rangle|^2 = \frac{\eta_1 + \lambda h}{2R}. \quad (374)$$

A questo punto, eliminando λ si ottiene l'espressione analitica per il ROC:

$$P_D = \left(\sqrt{P_F(1-h)} + \sqrt{(1-P_F)h} \right)^2, \text{ per } 0 \leq P_F \leq 1-h, \quad (375)$$

$$P_D = 1, \text{ per } 1-h \leq P_F \leq 1. \quad (376)$$

Rilevamento omodino: consiste in una misurazione dell'operatore di quadratura q (o p) associato ad uno specifico modo, il cui risultato è una variabile continua q (o p) che segue una distribuzione di probabilità $P(q)$ (o $P(p)$). Nel caso di stati gaussiani, le probabilità sono anch'esse gaussiane. Da un punto di vista sperimentale, il rilevamento omodino è realizzato miscelando lo stato quantico che deve essere misurato con un oscillatore locale su uno splitter 50:50, per poi misurare l'intensità dei modi di uscita. La differenza di tali intensità è proporzionale alla quadratura q , mentre la quadratura p può essere misurata applicando uno sfasamento di fase pari a $\pi/2$ all'oscillatore locale.

Rilevamento eterodino: permette di misurare entrambi i campi di quadratura nello stesso istante di tempo. Esso è realizzato in modo pratico miscelando il modo quantistico di interesse con un modo di vuoto su un beam splitter 50:50, per poi misurare tramite rilevamento omodino le quadrature q e p dei due modi di uscita. Comunque va considerato che gli operatori p e q non commutano e, quindi, misurando entrambi i contributi di quadratura allo stesso tempo, si incorre in rumore addizionale fornito dal principio di indeterminazione di Heisenberg.

Conteggio di fotoni: consiste nel misurare il numero di fotoni per ottenere l'operatore numero.

Nell'illuminazione quantistica l'informazione relativa alla presenza/assenza di un target è contenuta negli elementi di correlazione della matrice di covarianza che dipende da entrambe le componenti di quadratura, e, pertanto, non può essere trovata senza aggiungere del rumore in fase di misurazione.

Come conseguenza non è possibile sfruttare il vantaggio offerto dall'approccio quantistico tramite l'impiego di misurazioni quantistiche standard. Infatti nei radar quantistici è necessario costruire un ricevitore in grado di mappare le correlazione all'interno del conteggio dei fotoni. Un esempio è il cosiddetto OPA, rappresentato in Figura 26, il quale effettua le seguenti trasformazioni:

$$c_k = \sqrt{G}a_I^k + \sqrt{G-1}a_R^{\dagger k}, \quad (377)$$

$$d_k = \sqrt{G}a_R^k + \sqrt{G-1}a_I^{\dagger k}, \quad (378)$$

dove $G = 1 + \epsilon^2$ è il guadagno del OPA ed il conteggio dei fotoni avviene nel modo idler amplificato $N_k = \langle c_k^\dagger c_k \rangle$.

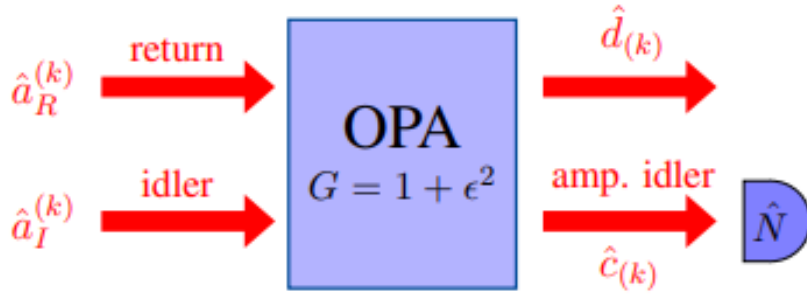


Figura 26: Rappresentazione schematica di un ricevitore OPA. Il fotone riflesso dal target e quello idler memorizzato costituiscono gli ingressi di un OPA, con un guadagno molto basso ed il conteggio dei fotoni avviene sul fotone idler amplificato. La decisione relativa alla presenza o assenza del target dipende dal confronto del numero di conteggio dei fotoni rispetto ad una certa soglia N_{th} .

Sotto entrambe le ipotesi del target, il modo c_k è in uno stato termico con un numero medio di fotoni pari a:

$$N_0 = GN_S + (G-1)(1+N_B), \quad (379)$$

$$N_1 = GN_S + (G-1)(1+N_B + \kappa N_S) + 2\sqrt{G(G-1)}\sqrt{\kappa N_S(N_S+1)}, \quad (380)$$

rispettivamente per le ipotesi H_0 e H_1 .

Date M copie dello stato idler amplificato, la strategia ottimale per la decisionalità consiste nel contare il numero totale di fotoni n e confrontarlo con una specifica soglia. La distribuzione di probabilità di n per le due ipotesi equivale a:

$$P_{0-1}(n) = \binom{n+M-1}{n} \frac{(N_{0-1})^n}{(1+N_{0-1})^{n+M}}. \quad (381)$$

Per $M \gg 1$ la funzione può essere approssimata ad una gaussiana e la soglia può essere ricavata da una decisione Bayesiana: $N_{th} = M(\sigma_1 N_0 + \sigma_0 N_1)/(\sigma_0 + \sigma_1)$ e l'ipotesi H_0 è vera se $N < N_{th}$ e viceversa.

Tramite l'impiego di un ricevitore OPA si ottiene un esponente della funzione errore che risulta essere il doppio rispetto a quello dell'approccio classico, fornendo una soluzione sub-ottimale per il raggiungimento di un potenziale vantaggio quantistico, come espresso nel grafico in Figura 27, concernente la dipendenza della funzione errore dal numero M ottenibile in fase di misurazione.

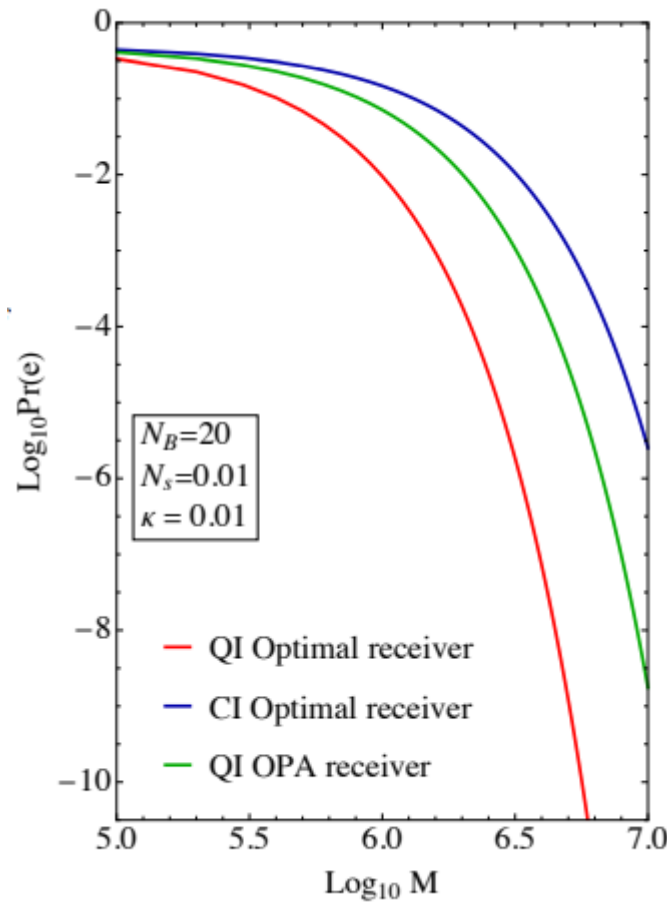


Figura 27: Limiti superiori per la probabilità di errore relativa ad un illuminazione classica (blu - il limite Chernoff è saturato dall'utilizzo di un trasmettitore di stati coerenti e da un ricevitore omodina), e ad un trasmettitore per illuminazione quantistica con (verde) ricevitore OPA (limite classico Battacharyya) ed un (rosso) ricevitore ideale (limite quantistico Chernoff), in funzione del numero di copie M di stati utilizzati per interrogare la regione di interesse.

Le prestazioni sub-ottime del ricevitore OPA sono dovute al fatto che questo tipo di ricevitore analizza gli M modi riflessi-idler uno per uno. Questa strategia è nota per essere sub-ottima in riferimento a stati quantistici come quelli descritti dalle matrici di covarianza nella forma seguente (scritte in funzione delle ipotesi H_0 e H_1):

$$V_0 = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & \sqrt{\kappa}C_q & 0 \\ 0 & A & 0 & -\sqrt{\kappa}C_q \\ \sqrt{\kappa}C_q & 0 & S & 0 \\ 0 & -\sqrt{\kappa}C_q & 0 & S \end{pmatrix}, \quad (382)$$

con $S = 2N_s + 1$, $A = 2\kappa N_s + B$, che per $\kappa N_s \ll 1$, corrisponde ad $A \approx B$.

Al fine di superare tale limite, è necessario indagare la tecnica di SPDC inversa su cui è basato il funzionamento del ricevitore SFG. In questo modo, impiegando un cristallo non lineare simile a quello utilizzato per la SPDC, tramite due fotoni di ingresso con specifica frequenza e momento, si potrebbe avere in uscita la generazione di un fotone di pompa. Affinché tale processo sia innescato, è necessario che gli elementi anti diagonali della matrice di covarianza siano non nulli, ovvero vi sia correlazione tra il fotone signal e idler. L'idea alla base di tale ricevitore consiste nel superare il limite di analizzare i modi signal e idler a coppie, tramite una combinazione di tutti gli M stati ricevuti che hanno interrogato la regione di interesse, in modo tale che l'informazione relativa alla presenza di un target venga codificata nella presenza di fotoni nel modo di pompa. Per ottenere un miglioramento prestazionale di tale ricevitore, si pongono dei circuiti feed-forward (FF) che implementano operazioni non lineari addizionali condizionate dalle risultanze delle misurazioni dei modi di uscita del ciclo precedente (Figura 28).

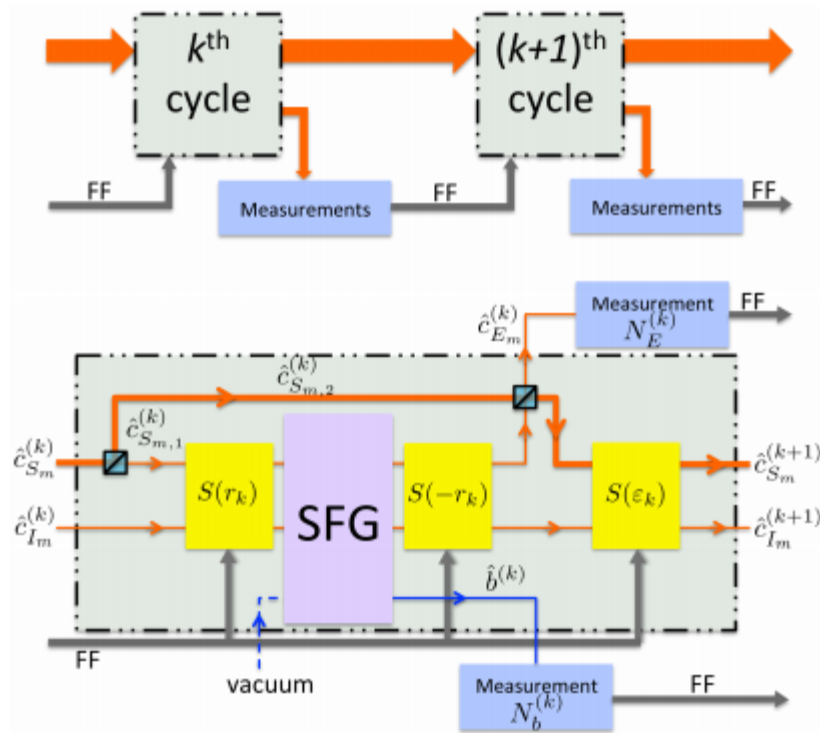


Figura 28: Rappresentazione schematica di un ricevitore FF-SFG. La parte superiore della figura mostra due cicli successivi del circuito di feed-forward. La parte sottostante mostra la struttura del k-esimo ciclo, dove una porzione del modo riflesso viene combinata con il segnale idler per le operazioni del blocco SFG. I blocchi gialli della figura rappresentano operazioni non lineari addizionali a doppio modo con parametri configurabili che sono condizionati dai risultati delle misurazioni del blocco precedente.

Il ricevitore in Figura 28 è denominato FF-SFG, il quale, sotto la condizione (non realistica) che il blocco SFG abbia un'efficienza unitaria relativamente alla singola coppia di fotoni, consente di saturare il limite quantistico di Chernoff e quindi di raggiungere i 6dB di guadagno prestazionale nell'ambito dell'illuminazione quantistica con stati entangled.

In funzione dei ricevitori ivi presentati, al fine di effettuare una comparazione prestazionale, è necessario modellare matematicamente la funzione ROC per ognuno di essi.

Relativamente al caso classico, per $NB \gg 1$, si ha che la migliore tecnica di rilevamento di uno stato coerente è di tipo omodino, in cui la presenza del target è codificata nella discriminazione di due funzioni gaussiane con medesima varianza ma medie differenti. In tale contesto è possibile esprimere la probabilità di falso positivo e di rilevamento in funzione della soglia λ per un test di Neyman-Pearson:

$$P_F^{CI} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\log \lambda}{d} + \frac{d}{2} \right) \right], \quad (383)$$

$$P_D^{CI} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\log \lambda}{d} - \frac{d}{2} \right) \right], \text{ con } d = 2 \sqrt{\frac{M \kappa N_s}{2N_B + 1}}. \quad (384)$$

Dalle probabilità sopra riportate è possibile tracciare il grafico ROC per un trasmettitore a stato coerente con rilevamento omodino (curva blu in Figura 29).

Per calcolare il ROC relativo all'illuminazione quantistica con ricevitore OPA si assume che $M \gg 1$ e che si utilizza il teorema del limite centrale per approssimare la densità di probabilità di conteggio dei fotoni con una funzione gaussiana:

$$P_{N|H_{0-1}}(n|H_{0-1}) = \frac{e^{-\frac{(n-MN_{0-1})^2}{(2M\sigma_{0-1}^2)}}}{\sqrt{2\pi M\sigma_{0-1}^2}}, \quad (385)$$

con N_{0-1} pari al numero medio di fotoni definito precedentemente durante la trattazione del ricevitore OPA e $\sigma_{0-1}^2 = N_{0-1}(N_{0-1} + 1)$. A questo punto si calcola la probabilità di falso positivo e di rilevamento, tramite la discriminazione tra due funzioni gaussiane ed il risultato di tale operazione fornisce un andamento analitico del ROC (curva verde in Figura 29).

Infine, si consideri il ricevitore FF-SFG, in cui il ROC si può approssimare alla discriminazione dello stato coerente $\left| \frac{N_s \kappa M}{N_B} \right\rangle$ rispetto allo stato di vuoto. Approssimando sia lo stato coerente che quello di vuoto come stati puri, si ha una stima del ROC secondo la seguente formula (curva rossa in Figura 29):

$$P_D = \left(\sqrt{P_F(1-h)} + \sqrt{(1-P_F)h} \right)^2, \text{ per } 0 \leq P_F \leq 1-h, \quad (386)$$

$$P_D = 1, \text{ per } 1-h \leq P_F \leq 1, \quad (387)$$

$$\text{con } h = 1 - e^{-\frac{N_s \kappa M}{N_B}} \quad (388)$$

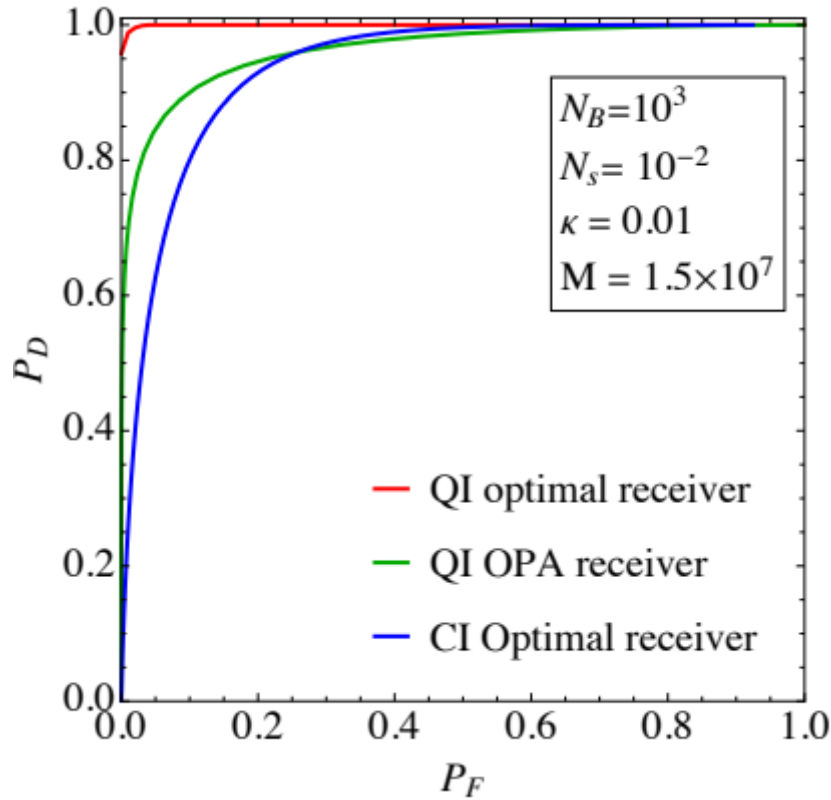


Figura 29: ROC per differenti approcci di rilevamento. Il numero medio di fotoni trasmessi N_s è scelto molto basso al fine di garantire il vantaggio offerto dalle tecniche quantistiche, mentre il valore di N_B è tipico delle bande delle microonde.

Nelle condizioni di regime in cui il ROC è stato rappresentato per consentire una comparazione tra differenti approcci di radar, siccome la potenza di trasmissione è molto bassa, al fine di ottenere una probabilità di rilevamento vicino al valore unitario, è necessario avere milioni di copie degli stati entangled (M) utilizzati per sondare la regione di interesse.

Per redigere meglio le conclusioni di tale analisi concernente possibili sezioni riceventi di un radar quantistico, si quantifica la comparazione prestazionale in parola tramite un grafico in funzione del rapporto segnale-rumore e della probabilità di rilevamento, per differenti e fissati valori della probabilità di falsi allarmi. Questa rappresentazione consente una maggiore chiarezza sulla lettura dei potenziali vantaggi offerti da un radar quantistico in comparazione al paritetico classico. Il rapporto segnale-rumore viene considerato come il numero di fotoni riflessi diviso il numero di fotoni del rumore di fondo:

$$SNR = \frac{M\kappa N_S}{N_B}. \quad (389)$$

A questo punto è interessante notare che le prestazioni dell'illuminazione classica ottimale, come riportato nella descrizione analitica del ROC, dipende dai parametri di sistemi solo attraverso d , che nel caso $NB \gg 1$, può essere approssimato a $d \approx \sqrt{\frac{SNR}{2}}$. Analogamente, le prestazioni ROC del ricevitore FF-SFG sono ben approssimate considerando il problema di discriminazione di uno stato coerente $|SNR\rangle$ e lo stato di vuoto. Le prestazioni degli schemi ottimali di illuminazione classica e quantistica, sulla base di quanto descritto, sono riportate in Figura 30.

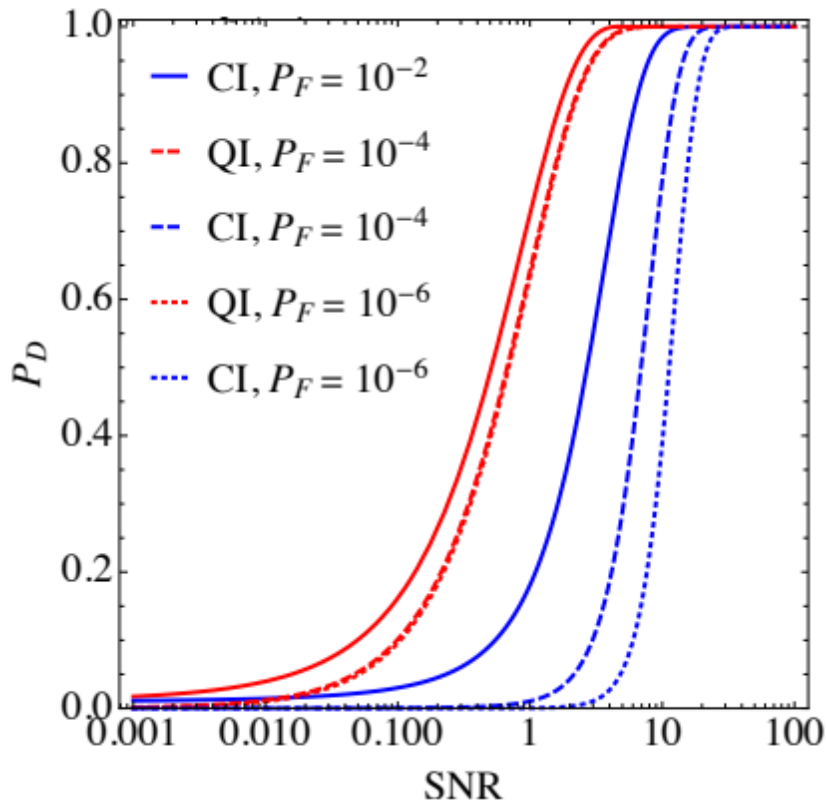


Figura 30: Probabilità di rilevamento in funzione del SNR per differenti valori fissati di probabilità di falso allarme.

Dalla Figura 30 si evince una considerazione interessante nello scenario Neyman-Pearson, ovvero che il vantaggio quantistico non è soltanto limitato a 6dB. Si può notare infatti che le curve rosse (illuminazione quantistica) si allontanano sempre di più da quelle blu (illuminazione classica) per valori sempre più decrescenti della probabilità di falso allarme. Quantitativamente, per raggiungere una probabilità di rilevamento pari a 80%, considerando le probabilità di falso allarme riportate nel grafico di Figura 30 (ordinati per valori decrescenti), si ottiene che il valore SNR dell'illuminazione quantistica rispetto a quella classica è minore rispettivamente di 6, 8.2 e 8.9 dB. Infatti, usando un approccio entropico, il vantaggio quantistico potrebbe essere arbitrariamente largo, scegliendo N_s arbitrariamente piccolo. Comunque per $N_s \rightarrow 0$, le probabilità di rilevamento sia nel caso classico che quantistico si annullerebbero e solamente tramite la trasmissione di infiniti stati ($M \rightarrow \infty$) si arriverebbe ad una probabilità di rilevamento finita. Quanto descritto è un significativo svantaggio nell'impiego dell'illuminazione quantistica.

Principali limitazioni di un radar quantistico

Vi sono delle limitazioni da considerare prima di poter affermare che l'illuminazione quantistica sia utile per identificare un target.

Si consideri di poter generare un impulso di luce contenente M copie di uno stato a doppio modo entangled contenente N_s fotoni per ogni modo. Generalmente gli stati entangled sono generati tramite un processo SPDC che avviene se e solo se la condizione di phase-matching viene rispettata. Tale condizione può essere rispettata per un range finito di frequenze noto come banda di phase-matching W . A frequenze ottiche ($\omega \approx 100 THz$) un tipico valore della banda di phase-matching è tipicamente pari a $W \approx 1 THz$, mentre nel regime delle microonde ($\omega \approx 10GHz$) si hanno valori pari a $W \approx 100MHz$. Pertanto, un impulso della durata T contiene $M \approx WT$ coppie indipendenti signal-idler. Quindi un impulso contenente $M = 10^6$ stati entangled ha una durata pari a $T \approx 1\mu s$ nelle lunghezze d'onda ottiche, ma una durata $T \approx 10ms$ nel regime delle microonde.

La lunghezza dell'impulso, nella teoria dei radar classici, ha un notevole impatto per il dimensionamento della cella di risoluzione del radar. A tal riguardo, tramite uno script Matlab, sono state riportate tre differenti celle di risoluzione, calcolate su parametri di radar assimilabili a quelli dei casi reali. Pertanto, avere un impulso di segnale così lungo, conduce ad ottenere una cella di risoluzione molto elevata, fornendo una scarsa precisione del sistema quantistico, ad esempio nell'eventuale distinzione di molteplici target all'interno della medesima cella.

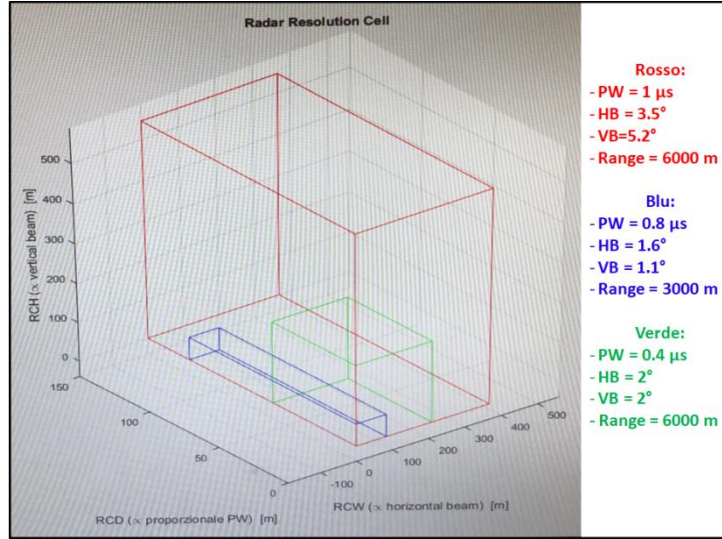


Figura 31: Grafico 3D realizzato in Matlab per la definizione delle celle di risoluzione radar per differenti valori parametrici inseriti in ingresso.

È altresì importante vedere quanta potenza viene trasmessa in ogni impulso. Tale potenza può essere stimata come $P \approx \frac{\hbar \omega M N_s}{T} \approx \hbar \omega W N_s$. A questo punto, ci si colloca in un regime dove si potrebbe ottenere un vantaggio quantistico ($N_s \approx 0.01$), ottenendo $P \approx 1nW = -60dBm$ nelle frequenze ottiche e $P \approx 0.01fW = -110dBm$ per le microonde. Perciò, nelle bande frequenziali delle microonde, in cui il forte rumore di fondo giustificherebbe l'utilizzo dell'illuminazione quantistica, le potenze raggiungibili risultano essere diversi ordini di grandezza minori rispetto a quanto necessario per rilevare un target in uno scenario realistico. Si enfatizza che, al fine di aumentare la potenza dell'impulso, non risulta possibile aumentare il fattore N_s , altrimenti si perderebbe il vantaggio prestazionale dell'approccio quantistico. Considerando inoltre che la banda di phase-matching W non può essere maggiore della frequenza del segnale, non esiste alcun altro modo di aumentare la potenza di trasmissione dell'impulso nel dominio delle microonde.

Siccome l'illuminazione quantistica può interrogare soltanto un unico valore di polarizzazione, di spazio (elevazione, azimuth e distanza) e di Doppler alla volta, si deduce un'ulteriore limitazione connessa alla durata dell'impulso nella banda frequenziale delle microonde. Infatti un target che non risiede in una univocità spaziale, frequenziale e di polarizzazione introdurrà un disaccoppiamento del modo, che avrà impatto sulla correlazione tra il signal e idler. Questo disaccoppiamento è quantificabile con un fattore κ_m e si colloca come fattore moltiplicativo in tutti gli esponenti di errore. Per tale motivazione, impulsi di durata molto lunga che sono necessari per ottenere un elevato valore M nel regime delle microonde, risultano essere un problema per quanto riguarda la summenzionata limitazione.

La capacità di memorizzazione del fotone idler per le misure di correlazioni possono essere quantificate con un valore di trasmissività equivalente ad un fattore moltiplicativo κ_I negli esponenti di errori.

In uno scenario realistico (in maniera maggiore in regime ottico) la riflettività del target è ignota e la fase del segnale riflesso è modificata in maniera arbitraria. Questo effetto, noto come fading, annulla il vantaggio quantistico presentato da un ricevitore OPA, rendendo il vantaggio del ricevitore FF-SFG di tipo sub-esponenziale.

Rilevatori a singolo fotone

Come sin qui espresso, il vantaggio offerto dai radar quantistici avviene in un regime di bassa trasmissione, ovvero una condizione tale per cui il trasmettitore emette un valore significativamente basso di numero medio di fotoni. In questo modo, si riesce ad ottenere una trasmissione di uno stato entangled composto da nr. 2 fotoni, ovvero il fotone di signal per l'interrogazione della regione di interesse e il fotone idler per effettuare le misurazioni congiunte con il fotone riflesso. In fase di ricezione è importante sfruttare il grado di correlazione dello stato emesso. In tale contesto, è significativo comprendere in che maniera e con quale tipologia di dispositivo risulta possibile individuare la presenza di un singolo fotone.

Il rilevamento di un singolo fotone è una tecnica richiesta negli esperimenti di ottica quantistica in entrambi i domini ottici e microonde. Tuttavia, l'energia dei quanti di microonde si distanzia da quattro a cinque ordini di grandezza inferiori rispetto alla loro controparte ottica, rendendo estremamente complesso il rilevamento efficiente di singoli fotoni nel regime delle microonde. Un classico rilevatore a singolo fotone a microonde è implementato con un sistema Λ ad adattamento di impedenza comprendente stati di un qubit superconduttore accoppiato ad un risonatore a microonde. Ciascun fotone induce deterministicamente una transizione Raman nel sistema Λ ed eccita il qubit. In tale contesto si presenta una sperimentazione ove si è ottenuta un'elevata efficienza di rilevamento di un singolo fotone pari a $0,66 \pm 0,06$ con una bassa probabilità di conteggio scuro di $0,014 \pm 0,001$, una larghezza di banda di circa $2\pi * 16MHz$ e un tempo di reset di circa 400 ns.

Il rilevamento a un singolo fotone è essenziale per molteplici applicazioni, consentendo il conteggio dei fotoni, di ricavare le statistiche della misurazione e di effettuare le successive analisi correlazionali.

Nel dominio ottico esistono vari tipi di rivelatori a singolo fotone, tuttavia effettuare una rilevazione a singolo fotone nel dominio delle microonde risulta molto complesso a causa dell'energia molto limitata associata ad ogni fotone.

Lo schema del rilevatore ivi presentato non richiede alcuna modellazione temporale del fotone di ingresso, né un controllo preciso dei parametri temporali del sistema adattato alla modalità temporale dei fotoni di ingresso, come avviene normalmente.

Il principio di funzionamento del rilevatore utilizza l'elettrodinamica quantistica in guida d'onda. Si consideri un sistema a tre livelli di tipo Λ che termina una linea di trasmissione mono dimensionale (1D). Nel sistema a tre livelli, il fotone incidente induce deterministicamente una transizione Raman che commuta lo stato del sistema Λ .

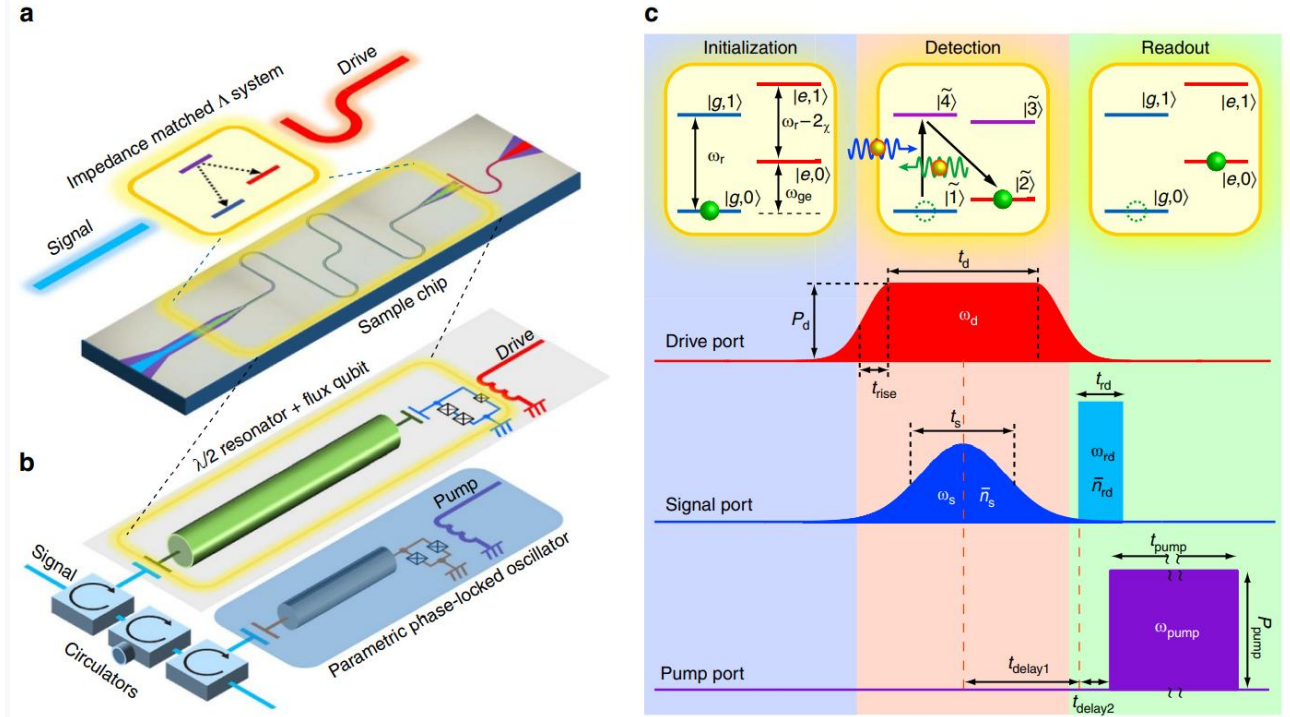


Figura 32: Configurazione sperimentale del rilevatore a singolo fotone e sequenza di impulsi impiegati nella rilevazione. (a) Immagine del chip contenente un qubit di flusso e un risonatore a microonde a superconduttore accoppiato capacitivamente. Per alcune condizioni adeguate del qubit di drive, il sistema accoppiato funziona come un sistema a tre livelli di tipo Λ ad adattamento di impedenza. (b) Schema del rivelatore di fotone a microonde costituito dal sistema accoppiato e collegato ad un oscillatore parametrico ad aggancio di fase (PPLO) tramite tre circolatori in serie. Il circuito ha tre porte di ingresso: segnale, qubit di drive e segnale di pompa per il PPLO. (c) Diagramma del livello di energia del sistema accoppiato e sequenza di impulsi per il rilevamento di un singolo fotone. Il sistema viene prima preparato nello stato ground.

Durante la fase di rilevamento, si applicano simultaneamente gli impulsi di drive e di segnale. Il convertitore è parametrizzato per soddisfare la condizione di adattamento dell'impedenza tale che un fotone di segnale (freccia blu) induce una transizione Raman deterministica. Un fotone down convertito (freccia verde) viene emesso nel processo e scartato. Nella fase di lettura, si rileva lo

stato eccitato del qubit in modo non distruttivo inviando un impulso di lettura del qubit. Lo sfasamento dipendente dallo stato del qubit nell'impulso riflesso è discriminato dal PPLO.

Il dispositivo si compone principalmente di un qubit di flusso a superconduttore accoppiato capacitivamente con un risonatore a microonde. Tramite una scelta appropriata della frequenza ω_d e della potenza P_d del drive del qubit, il sistema si comporta come un adattatore di impedenza con eguale velocità di decadimento radiattivo tra il suo stato superiore ed inferiore. Il PPLO consente di effettuare una lettura non distruttiva del qubit. In un regime di accoppiamento dispersivo, l'interazione del qubit-risonatore rinormalizza le auto-frequenze per ottenere $\omega_{|g,n\rangle} = n\omega_r$ e $\omega_{|e,n\rangle} = \omega_{ge} + n(\omega_r - 2\chi)$, ove ω_{ge} e ω_r sono le frequenze rinormalizzate del qubit e del risonatore, mentre χ è lo scostamento di frequenza del risonatore dovuto all'interazione con il qubit. Il sistema è preparato nello stato ground, in cui si applica un impulso di drive al qubit. Sotto un'appropriata condizione di potenza si ottiene un identico rate di decadimento radiattivo da $|4\rangle$ (o $|3\rangle$) verso i livelli più bassi. Pertanto, si realizza un sistema Λ ad adattamento di impedenza comprendente $|1\rangle, |2\rangle$ e $|3\rangle$. Un singolo fotone a microonde incidente (ad inviluppo gaussiano), applicato in modo sincrono con l'impulso di drive attraverso la porta di segnale ed in risonanza con la transizione $|1\rangle \rightarrow |4\rangle$, induce in modo deterministico, una transizione Raman $|1\rangle \rightarrow |4\rangle \rightarrow |2\rangle$ e viene down convertito in un fotone alla frequenza di transizione $|4\rangle \rightarrow |2\rangle$. Per effettuare la fase di lettura, si applica un impulso di lettura con frequenza $\omega_{rd} = \omega_r - 2\chi = \omega_{|e,1\rangle} - \omega_{|e,0\rangle}$ attraverso la porta di segnale, che riflettendo sul risonatore, acquisisce uno sfasamento dipendente dallo stato del qubit di 0 o π . Questo sfasamento viene rilevato dal PPLO con elevata fedeltà.

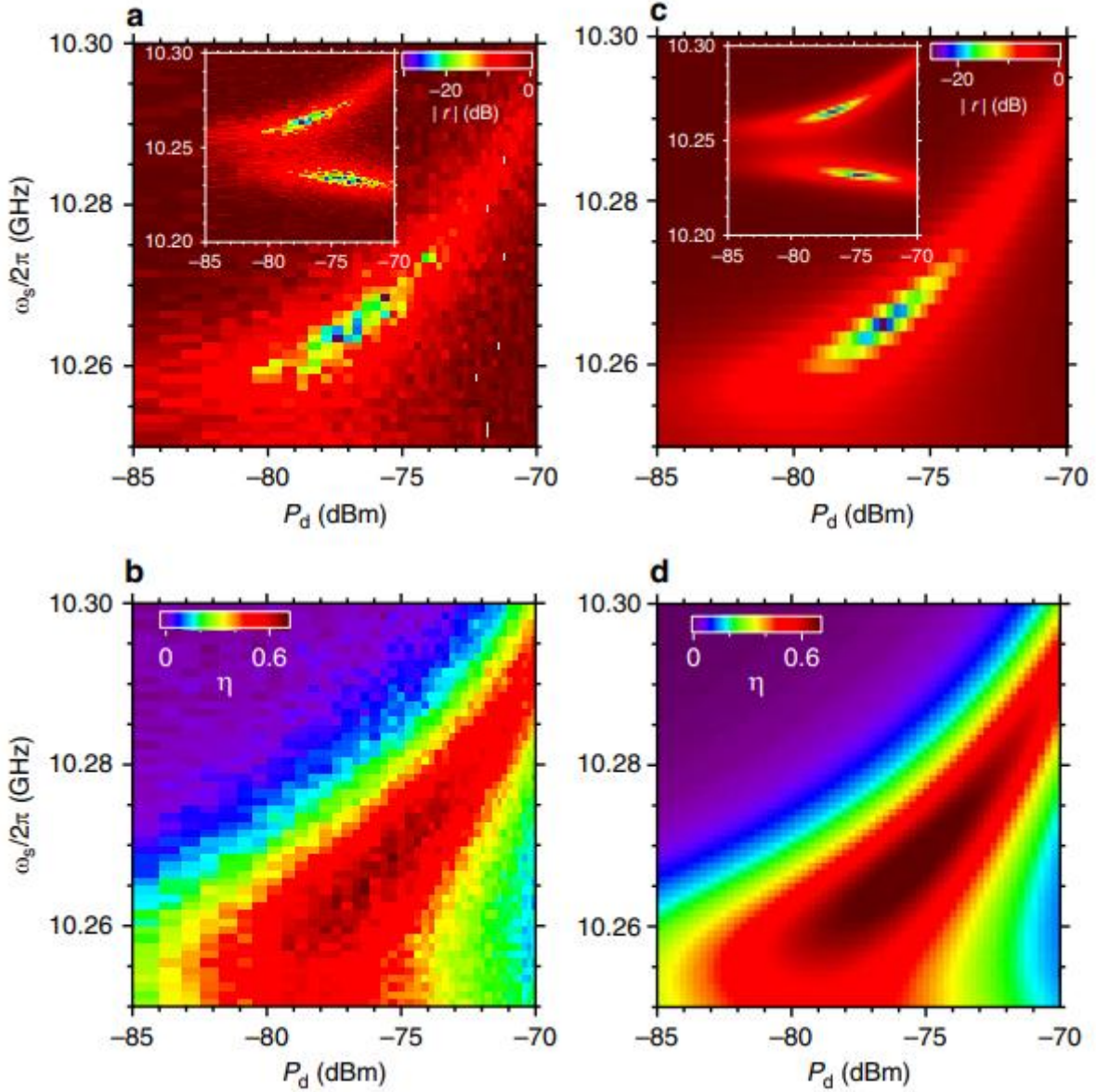


Figura 33: Accoppiamento di impedenza e rilevamento del fotone a microonde. (a) Ampiezza del coefficiente di riflessione dell'impulso di segnale di ingresso, costituito da uno stato coerente con numero medio di fotoni pari a 0.1, in funzione della potenza di drive del qubit e della frequenza del segnale. Il PPLO non è attivato durante tale misurazione. La regione di accoppiamento di impedenza è identificata dai punti blu scuro, ove il fotone viene completamente assorbito. L'ulteriore regione in cui il coefficiente di riflessione risulta molto basso corrisponde alla transizione Raman $|1\rangle \rightarrow |3\rangle \rightarrow |2\rangle$. (b) Efficienza di rilevamento di un fotone a microonde. L'efficienza raggiunge il valore massimo nel punto di adattamento di impedenza, ove avviene la transizione Raman $|1\rangle \rightarrow |4\rangle \rightarrow |2\rangle$. (c, d) Predizioni teoriche di (a) e (b).

In tale esperimento si ottiene un valore molto basso del coefficiente di riflessione, con un abbassamento inferiore di 25dB, in un punto di lavoro equivalente a $P_d = -76 \text{ dBm}$, $\frac{\omega_s}{2\pi} =$

tratteggiate rosse) alla frequenza $\frac{\omega_{rst}}{2\pi} = 10.162 \text{ GHz}$.

Applicabilità di un radar quantistico

La trattazione sinora affrontata riporta i fondamenti teorici, arricchiti da risultati sperimentali connessi allo studio di un possibile apparato costituente un radar quantistico. Innanzitutto, si ritiene opportuno sottolineare che, le risultanze ivi riportate, seppur di notevole valenza tecnica, sono esclusivamente prove di laboratorio o comunque prove effettuate secondo condizioni ben definite. La maggior parte di tali risultanze denota un significativo scostamento rispetto ad una applicazione reale di un sistema radar quantistico. In tale sezione, si riportano ulteriori considerazioni ed analisi concernenti ragionamenti di applicabilità di tale tecnologia, prevalentemente in un contesto militare ed in scenari di Guerra Elettronica. Le successive analisi sono condotte sulla base di una comparazione con l'equivalente caso classico, focalizzandosi su fondamentali principi di radio frequenza.

Nozioni principali del radar classico

Il funzionamento di un radar di tipo classico si basa sull'invio di un impulso a radio frequenza verso una certa area di interesse e nella successiva ricezione dello stesso a seguito della riflessione di un target presente nella zona di interesse. In funzione del tempo di arrivo dell'impulso riflesso, un dispositivo radar è in grado di calcolare la distanza del target e, tramite l'analisi delle componenti frequenziali, di ricavarne anche la velocità. Le prestazioni di un radar ovviamente sono correlate ad innumerevoli parametri dei componenti architetturali del sistema (e.g. potenza del trasmettitore, guadagno di antenna, beam width, ecc.).

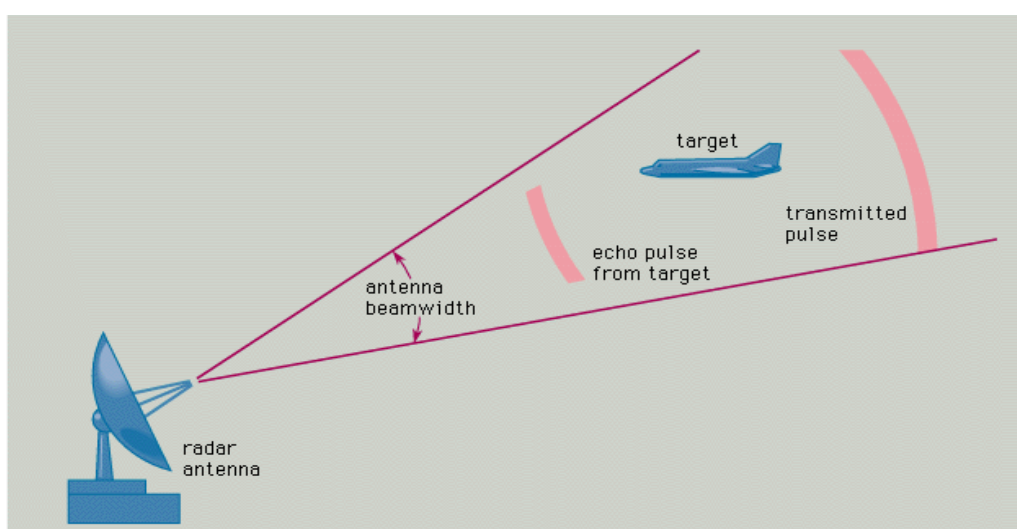


Figura 35: Rappresentazione grafica del funzionamento di un dispositivo radar in cui sono presenti l'antenna rice-trasmittente, il fascio di radiazione dell'antenna e il target presente in una specifica porzione dello spazio identificato tramite l'eco ricevuto dalla riflessione dell'impulso emesso.

Da un punto di vista di propagazione del segnale, per dimensionare i parametri principali di un apparato radar, si considera la cosiddetta equazione del radar, in cui si evince che la potenza del segnale ricevuto è inversamente proporzionale alla quarta potenza della distanza del target, poiché il segnale deve percorrere un percorso di andata e ritorno, prima di essere rilevato. L'equazione del radar viene spesso formulata per ricavare la massima distanza rilevabile da un radar, in funzione dei parametri caratteristici della sezione rice-trasmittente e dell'oggetto da identificare.

The diagram shows the radar equation with red arrows pointing from labels to the corresponding variables in the formula:

$$R_{max} = \sqrt[4]{\frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 P_{min}}}$$

- Maximum detection range** points to R_{max} .
- Transmit power** points to P_t .
- Antenna gain** points to G^2 .
- Transmitted wavelength** points to λ^2 .
- Target radar cross section** points to σ .
- Minimum detectable signal** points to P_{min} .

Figura 36: Equazione del radar che consente di identificare la distanza di un target, in funzione dei principali parametri del dispositivo radar.

Uno degli elementi principali di un radar è il matched filter, la cui uscita corrisponde alla definizione della cosiddetta funzione di ambiguità. Quest'ultima quantifica il rilevamento del target da parte del radar, in funzione dell'analisi dell'impulso riflesso ricevuto.

○ Definition: The ambiguity function is the time response of a filter matched to a given finite energy signal when the signal is received with a delay τ and a Doppler shift ν relative to the nominal values expected by the filter.

$$|\chi(\tau, \nu)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(t) u^*(t + \tau) \exp(j2\pi\nu t) dt \right|$$

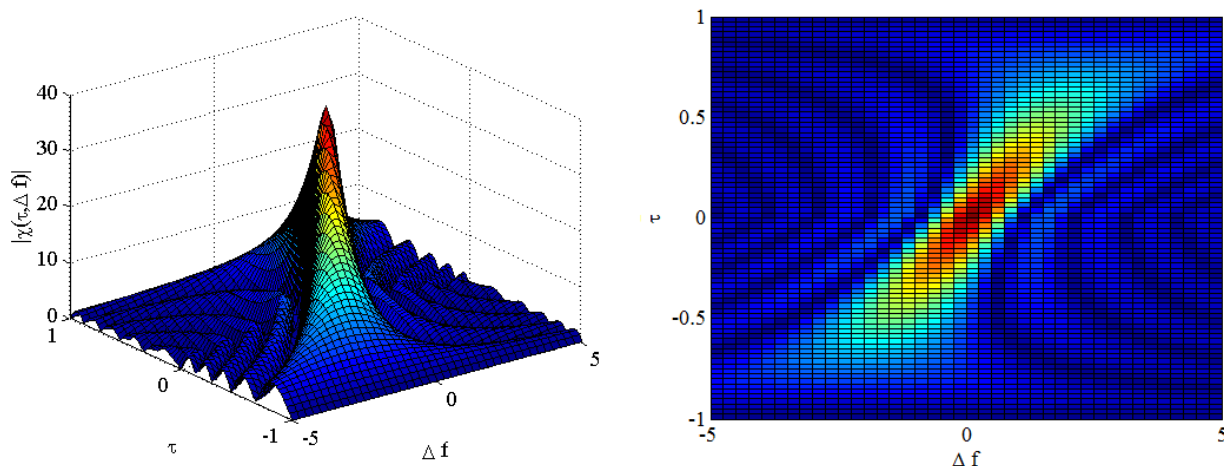


Figura 37: Definizione della funzione di ambiguità utilizzata nella sezione ricevente di un radar descritta da un integrale di convoluzione nel tempo e da una trasformazione di Fourier in frequenza. La funzione di ambiguità descritta in un grafico 3D consente di determinare la presenza di un target tramite il rilevamento dell'impulso ricevuto, con uno specifico ritardo espresso in numero di campioni ed una variazione Doppler espressa in shift frequenziale.

Come si nota dalla definizione, la funzione di ambiguità corrisponde, nel dominio del tempo ad un integrale di convoluzione, mentre, nel dominio delle frequenze ad una trasformazione di Fourier. La funzione di ambiguità viene ricavata tramite una misurazione temporale-frequenziale del segnale riflesso e dell'impulso trasmesso generato all'interno della catena ricevente. La funzione di ambiguità può essere rappresentata in un grafico tridimensionale per comprendere la presenza di un target, in una misurazione a soglia ad esempio. Lo studio di tale grafico lungo il piano temporale e frequenziale, consente di ottenere l'andamento complessivo del segnale ricevuto, in relazione alla presenza o assenza del target nella zona di interesse.

Architettura del radar quantistico

Per la realizzazione di un radar quantistico si identificano, da un punto di vista architettura, gli elementi peculiari costituenti un dispositivo operante con tale tecnologia. In tale ambito, si riportano i seguenti elementi concernenti la realizzazione di un radar quantistico:

1. sorgente di fotoni entangled: questa sezione corrisponde alla parte trasmittente del sistema, in i fotoni generati forniscono un elevato grado di correlazione;
2. propagazione: il fotone entangled generato deve essere irradiato verso una specifica direzione dello spazio, ove si sospetti sia presente un oggetto da identificare;
3. interazione con il target: il fotone entangled interagisce con il target, tramite un assorbimento o una riflessione del campo elettromagnetico incidente. La riflessione, inoltre, deve avvenire all'interno del fascio di radiazione dell'elemento ricevente, altrimenti il fotone riflesso non viene ricevuto, causando un evento di falso negativo;
4. memoria quantistica: per consentire di sfruttare il vantaggio offerto dalla tecnologia quantistica bisogna effettuare una misura congiunta tra il fotone riflesso e quello memorizzato. Per questo motivo uno dei due fotoni generati in uno stato entangled deve essere memorizzato all'interno del sistema per un tempo necessario atto a consentirne la misurazione;
5. ricevitore: bisogna implementare un'architettura ed una tecnica ricevente al fine di implementare e sfruttare realmente il vantaggio teorico offerto dall'approccio quantistico.

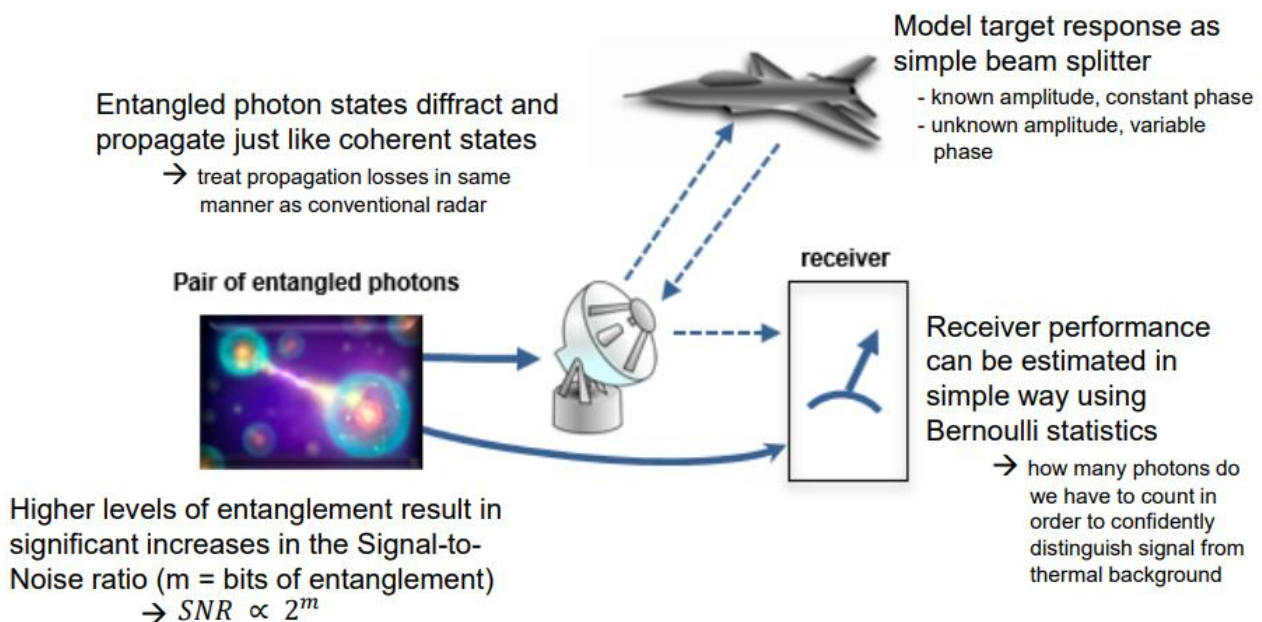


Figura 38: Elementi principali caratterizzanti un radar quantistico in cui si riportano le diversificate fasi connesse alla generazione, alla propagazione, all'interazione e alla ricezione dei fotoni in uno stato entangled.

Il radar quantistico viene spesso presentato come una tecnologia anti-stealth, in grado cioè di rilevare oggetti invisibili tramite un analogo dispositivo classico. A tal proposito bisogna sottolineare che, grazie al potenziale vantaggio ottenibile nell'esponente della probabilità di errore e

quindi del rapporto segnale-rumore, un radar quantistico fornirebbe una migliore sensibilità. Questo miglioramento consentirebbe di rilevare oggetti stealth che assorbono una percentuale del segnale incidenza, tramite l'impiego di vernici assorbenti a microonde, ma non offrirebbe fattivi vantaggi nel caso in cui la geometria del target riflettesse il fotone incidente in una direzione differente da quella offerta dal fascio di rilevazione dell'antenna ricevente.

In generale, tenendo in considerazione i parametri espressi nell'equazione del radar, si riportano, sinteticamente, i potenziali vantaggi pratici offerti da questa tecnologia operante in un regime di basso rapporto segnale-rumore (tipicamente -5/-10 dB):

- maggiore probabilità di rilevamento del target;
- significativa probabilità di rilevamento anche con SNR unitario (0 dB);
- maggiore complessità di rilevare il segnale del radar quantistico da sistemi di guerra elettronica nemici;
- maggiore resilienza ad una condizione di jamming;
- miglior rilevamento del target attraverso il clutter;
- maggiore radar cross section dei target.

Aspetti connessi alla Guerra Elettronica

Il dominio elettromagnetico sta progressivamente assumendo sempre maggiore interesse da un punto di vista tattico, operativo e strategico. In tale ambito, la Guerra Elettronica, ovvero le azioni finalizzate al dominio dello spettro elettromagnetico per azioni di attacco, di difesa e per il miglioramento della situational awareness, sta divenendo un aspetto fondamentale per l'assolvimento delle missioni.

L'impiego di un dispositivo radar quantistico sul campo di battaglia comporterebbe un notevole impatto in molteplici aspetti connessi alla Guerra Elettronica, in particolare sia nella generazione di nuove contromisure, sia nell'individuazione di piattaforme aeree non rilevabili con un approccio classico. Da un punto di vista tecnico-operativo, il beneficio ottenuto in termini di SNR, consentirebbe, a parità di dati parametrici, di:

- ridurre la potenza di trasmissione: tale aspetto è vincolante per ottenere un vantaggio quantistico. La riduzione della potenza di trasmissione del campo comporta di operare in maniera più efficiente sulla soglia di rumore, causando che i dispositivi elettronici atti alla ricezione dello spettro elettromagnetico, avrebbero maggiore difficoltà di individuazione della minaccia RF. Tra i dispositivi elettronici ad esempio si potrebbe impiegare un analizzatore di spettro per effettuare un'acquisizione dello spettro elettromagnetico in specifiche porzioni frequenziali, al fine di caratterizzare il dominio elettromagnetico durante un'operazione militare. In aggiunta a ciò, un dispositivo radar quantistico potrebbe ridurre

l'efficacia di dispositivi progettati per la ricezione dei modi radar per la protezione di un velivolo o di un veicolo, per il successivo rilascio della contromisura (e.g. chaff o jamming). L'aspetto di trasmettere un basso livello di segnale ha molteplici impatti nel settore della Guerra Elettronica, ove i moderni sistemi sono prevalentemente progettate su una logica di tipo reattivo, ovvero la tipologia di azione di jamming è asservita ad una preventiva analisi spettrale, poiché l'aumento sempre maggiori del numero e della tipologia di dispositivi da contrastare ha causato una saturazione delle risorse dei sistemi di contromisure;

- maggiore resilienza ad un'azione di disturbo: tra le contromisure elettroniche vengono annoverati i sistemi disturbatori di frequenza, detti jammer, costruiti per emettere un segnale elettromagnetico finalizzato al contrasto della minaccia RF. Tale resilienza va declinata comunque in termini di miglioramento prestazionale ottenuto sul SNR che si tramuta in un aumento del valore del rapporto jammer-segnale, calcolato nella condizione di inibizione. Ciò vuol significare che un jammer deve trasmettere maggiore potenza per ottenere del segnale RF minaccia;
- miglior rilevamento del target attraverso il clutter: oltre al mero aspetto connesso ad un beneficio nella geometria dello scenario di impiego del radar, quanto riportato potrebbe avere un impatto finanche da un punto di vista delle contromisure impiegate per l'inibizione di un radar nemico, ovvero il rilascio di chaff. Queste ultime interpongono un clutter tra il target ed il radar di puntamento, creando una sorta di occultamento nella regione di interesse. L'impiego di un radar quantistico consentirebbe di abbassare l'efficacia delle chaff, in quanto il sistema, come descritto, opera in maniera efficiente in ambiente elettromagnetico deteriorato, consentendo l'individuazione del bersaglio anche in porzioni spaziali in cui il bersaglio sia immerso all'interno di un elevato rumore di fondo.

Quanto descritto rappresenta una primaria contestualizzazione teorica dell'impiego di un radar quantistico nell'ambito della Guerra Elettronica, fermo restando le limitazioni tecniche che l'attuale tecnologia presenta, in comparazione ad esempio ad un dispositivo classico.

A tal proposito, ulteriori analisi devono essere affrontate per maggiore chiarezza, al fine di fornire la corretta valenza in funzione dei peculiari condizionamenti operativi. Si è dimostrato nel corso della trattazione seguente che il vantaggio offerto da un radar quantistico si verifica in maniera maggiore allorquando si riesca a generare uno stato entangled con due fotoni, di cui uno viene trasmesso per indagare lo spazio circostante ed uno viene memorizzato per le misurazioni nella sezione ricevente. A tal riguardo, bisogna ricavarsi la potenza di un singolo fotone nel regime delle microonde, al fine di poter effettuare contestualizzazioni maggiormente attagliate con le relative implicazioni operative dello scenario elettromagnetico. La potenza di un singolo fotone è stata

ricavata calcolando il flusso di fotoni al secondo, esprimendolo come rapporto tra la potenza e l'energia ottenuta alla specifica lunghezza d'onda:

$$\phi \left[\frac{\text{photons}}{\text{sec}} \right] = \frac{P[W]}{\hbar\omega[J]}. \quad (390)$$

Supponendo inizialmente di trasmettere un singolo fotone a 10 GHz ogni secondo, si ottiene:

$$P_{\text{single}} = 6.626 * 10^{-24} W \approx -202 \text{ dBm}. \quad (391)$$

Per ottenere un miglioramento prestazionale bisogna generare M coppie indipendente signal-idler all'interno dello stesso impulso, tenendo conto che la banda di phase matching in regime microonde è equivalente a circa 100 MHz. Considerando un tipico valore di riferimento $M = 10^6$, si ricava una lunghezza dell'impulso pari a $T = 10$ ms. Si ricalcola la potenza dell'impulso entangled trasmesso con i dati relativi alla lunghezza dell'impulso e alle coppie signal-idler trasmesse:

$$P_M = P_{\text{single}} * T * M \Rightarrow P_M[\text{dBm}] = P_{\text{single}}[\text{dBm}] + 10 * \log(M) - 10 * \log(T) \approx -202 + 60 + 20 \approx -122 \text{ dBm ogni } 10 \text{ ms di impulso}. \quad (392)$$

Al fine di valutare la bontà della formula impiegata per ricavare la potenza associata al numero di fotoni, si riporta la seguente matrice (Figura 39) in cui sono riportati valori tipici dei radar classici impiegati in ambito militare.

Conventional Radar Type	Freq.	Pulse width	Peak Power	# of Photons Transmitted	# of Photons Received (assume 1 m ² antenna, 1 m ² RCS)			
					1 km	10 km	100 km	1000 km
AN/SPS-40 	400-450 MHz	60 us	250 kW	5.3×10^{25}	8.5×10^{12}	8.5×10^8	85069	8.5
PAVE PAWS 	420-450 MHz	0.25-16 ms	600 kW	3.3×10^{28}	5.5×10^{15}	5.5×10^{11}	5.5×10^7	5,572

Source: Radar Handbook, 2nd Ed., 1990, Skolnik

Figura 39: Tabella di relazione tra la tipologia di radar, la frequenza, la lunghezza dell'impulso, la potenza di picco, il numero di fotoni trasmessi ed il numero di fotoni ricevuti (assumendo un'area efficace di antenna di 1 m² ed un target con RCS di 1 m²) per differenti distanze.

Si consideri ad esempio un radar operante a 425 MHz con potenza pari a 250 kW e un tempo di impulso di 60 μs. Impiegando la formula del flusso di fotoni nel tempo si ottiene quanto segue:

$$\phi = \frac{250 \text{ kW}}{6.626 * 10^{-34} \text{ Js} * 425 * 10^6 \text{ Hz}} \approx 88.77 * 10^{28} \frac{\text{fotoni}}{\text{sec}} \quad (393)$$

$$N_{Tx}(\text{numero di fotoni trasmessi per ogni impulso}) = 88.77 * 10^{28} \frac{\text{fotoni}}{\text{sec}} * 60 * 10^{-6} \text{sec} \approx 5.3 * 10^{25} \text{fotoni per ogni } 60\mu\text{s di impulso.} \quad (394)$$

Quanto ricavato è aderente ai dati presenti nella matrice summenzionata.

Un radar quantistico basa il suo comportamento sulla generazione di uno stato entangled, il quale processo potrebbe avvenire con tecnica SPDC. Nelle microonde, l'efficienza di conversione risulta un altro fattore vincolante. Infatti se si considera un segnale di pompa con potenza di 6 mW a 415 nm, si ottiene, solitamente, una generazione di 20000 coppie entangled (utili) al secondo a 830 nm. Poiché, in generale, l'efficienza di conversione è inversamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza d'onda, si ottiene che a 10 GHz ($\lambda = 0.03$ m), l'efficienza di conversione assume il seguente valore:

$$\varepsilon_{rel} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}} = 0.00526 \quad (395)$$

$$\varepsilon = 20000 * 0.00526 \approx 105 \frac{\text{coppie}}{\text{sec}} \quad (396)$$

Il numero ricavato corrisponderebbe alla generazione di una sola coppia di fotoni entangled ogni 10 ms. Si può anche ricavare il valore di efficienza di conversione nel caso ottico, ovvero, dati i dati del segnale di pompa e l'efficienza di conversione espressa in 20000 coppie al secondo, si ottiene quanto segue:

$$\phi = \frac{6*10^{-3}W*405*10^{-9}m}{6.626*10^{-34}Js*3*10^8\frac{m}{s}} \approx 122.25 * 10^{14} \frac{\text{fotoni}}{\text{sec}} \quad (397)$$

(laser @6mW @405nm – pompa)

$$\varepsilon_{conversione} = \frac{20000}{122.25*10^{14}} \approx 0.16 * 10^{-11}. \quad (398)$$

I suddetti calcoli si basano sulla formulazione dell'efficienza di conversione in un processo SPDC partendo da un numero tipico di coppie entangled utili per le successive misurazioni che, come è possibile osservare, risulta ben distante dai valori trovati nelle sperimentazioni presenti in letteratura e riportate in tale documento ($M = 10^6$ ogni 10 ms di impulso).

Una volta trovato il valore di potenza del radar bisogna calcolare che il segnale subisce un'attenuazione nel corso della propagazione in aria. Tale attenuazione, solitamente, viene calcolata con la cosiddetta formula di Friis del collegamento, la quale consente di ricavare il valore della potenza ricevuta, dati i guadagni di antenna, la frequenza di trasmissione, la distanza e la potenza di trasmissione. Tale formula si basa sul fatto che la propagazione dell'onda avviene su un piano sferico, in quanto, nel caso il coefficiente di attenuazione corrisponda al valore teorico di 2 (di solito

in un ambiente reale, a causa delle condizioni fisiche dell'aria tale valore potrebbe essere maggiore di 2), la potenza irradiata si distribuisce su una superficie sferica. Si riporta di seguito la formula di Friis del collegamento, espressa in forma logaritmica:

$$P_r[dBm] = P_t[dBm] + 20 * \log\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right) + G_t[dBi] + G_r[dBi]. \quad (399)$$

Per fornire degli ordini di grandezza ci si potrebbe concentrare inizialmente sull'attenuazione dello mezzo propagativo, considerando una frequenza di 10 GHz ed un range di 10 Km (significando che in un'applicazione radar si sta osservando un target a 5 Km).

$$20 * \log\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right) = 20 * \log\left(\frac{0.03m}{4\pi 10^4 m}\right) \approx -132 \text{ dB}. \quad (400)$$

Il valore di attenuazione stimato con la formula di Friis potrebbe essere compensato esclusivamente con un elemento radiante ad elevato guadagno, su una specifica direzione di propagazione.

Un'ulteriore considerazione che va effettuata sulla propagazione riguarda il grafico dell'attenuazione in aria in funzione della lunghezza d'onda. A differenza della formula di Friis del collegamento, tale valore di attenuazione non tiene conto degli effetti propagativi legati ad un fronte d'onda sferico, ma esclusivamente degli effetti di attenuazione legati all'interazione dei fotoni con le molecole d'aria, lungo una specifica direzione di propagazione (onda piana).

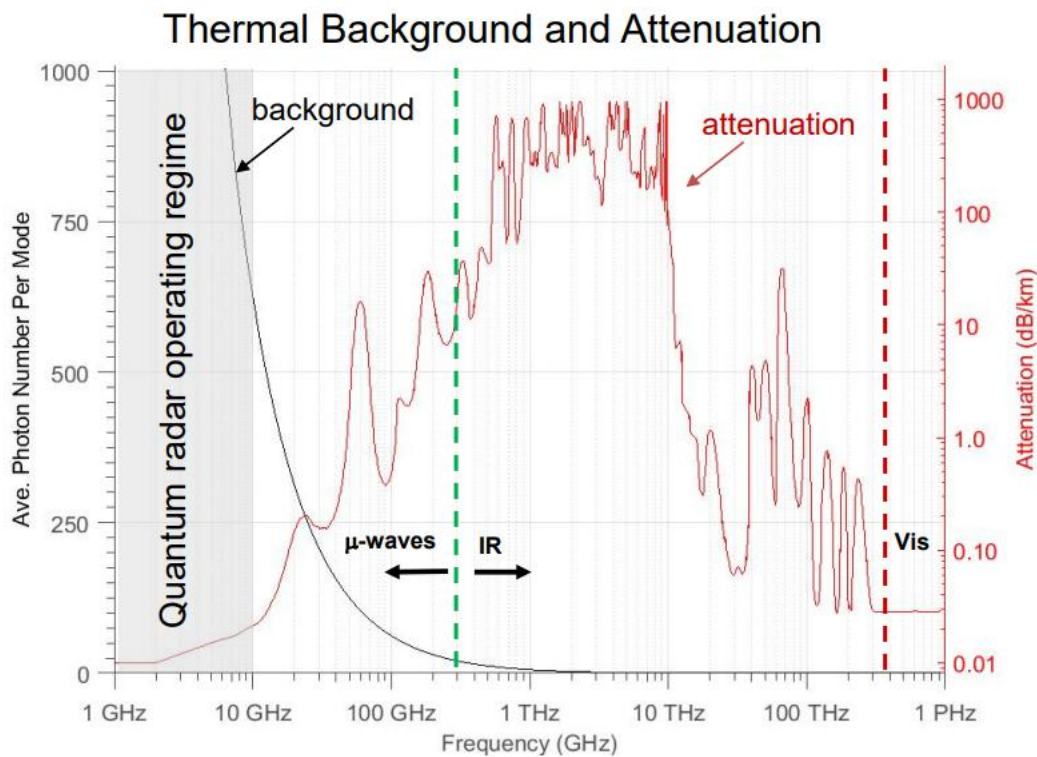


Figura 40: Attenuazione in dB/km e numero medio di fotoni di rumore di fondo in funzione della frequenza.

Alla frequenza di 10 GHz, si stima un'attenuazione pari a 0.02 dB/km ed un numero medio di fotoni di rumore termico per modo pari a circa 600. Calcolando la potenza associata a 600 fotoni per modo alla frequenza di 10 GHz, si ricava:

$$P_{noise} = 600 * \hbar\omega \approx 28 - 202 = -174 \frac{dBm}{sec} \Rightarrow -154 dBm \text{ per ogni } 10 \text{ ms di impulso} \quad (401)$$

Calcolo delle matrici di covarianza

In questa sezione si riportano i calcoli effettuati per ricavare le matrici di covarianza, le quali forniscono una quantificazione matematica della correlazione tra i fotoni di differenti stati quantistici. In particolare, si sono ricavate le matrici di covarianza di uno stato squeezed entangled, corrispondente al caso quantistico, e di uno stato coerente, corrispondente al caso classico. In tale maniera si è potuto dimostrare e confrontare le prestazioni e i vantaggi potenziali offerti dalla tecnologia quantistica.

Di seguito si riportano i calcoli effettuati, partendo dalla definizione dello stato squeezed sotto forma di operatori di creazione e distruzione, espressi come combinazione di funzioni iperboliche e degli operatori degli stati numero. Successivamente, le matrici di correlazione sono state espresse sia sottoforma di operatori posizione e momento, sia sottoforma di operatori di annichilazione e di creazione.

$$a_s = a_I = a * coshr + a^\dagger sinhr * e^\phi \quad (402)$$

$$a_s^\dagger = a_I^\dagger = a^\dagger * coshr + a * sinhr * e^{-\phi} \quad (403)$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} e N_s = |sinhr|^2 \quad (404)$$

Per calcolare agevolmente la matrice di covarianza è conveniente esprimere lo stato squeezed a due modi (TMSV) come una combinazione di stati numero, pesata tramite la relativa ampiezza di probabilità. Da ciò deriva che:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{P_n} |n\rangle_1 |n\rangle_2, \quad (405)$$

ove

$$P_n = (1 - U) U^n, \text{ con } U = \frac{\sinh^2 r}{\cosh^2 r} = \frac{N_s}{N_s + 1} \text{ (distribuzione di probabilità termica)}, \quad (406)$$

$$P_n = \frac{N_s^n}{(N_s + 1)^n} \quad (407)$$

$$\sqrt{P_n} = \frac{\sinh^n r}{\cosh^{n+1} r}. \quad (408)$$

Gli elementi appartenenti alla matrice di covarianza sono calcolati ricavando il valor medio.

Si esprime la matrice di covarianza in termini di operatori di creazione/distruzione concernente i fotoni signal e idler di uno stato squeezed a due modi.

$$C_{quantum} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2^\dagger \\ a_1^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^\dagger & a_2^\dagger & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 a_1^\dagger & a_1 a_2^\dagger & a_1 a_2 & a_1^2 \\ a_2 a_1^\dagger & a_2 a_2^\dagger & a_2^2 & a_2 a_1 \\ a_2^\dagger a_1^\dagger & a_2^{\dagger 2} & a_2^\dagger a_2 & a_2^\dagger a_1 \\ a_1^{\dagger 2} & a_1^\dagger a_2^\dagger & a_1^\dagger a_2 & a_1^\dagger a_1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (409)$$

$$\text{Siccome } a_1^\dagger a_1 = n,$$

$$\langle m|n \rangle = \delta_{m,n} \text{ (delta di Kronecker)} \quad (410)$$

$$[a_i, a_i^\dagger] = 1 \text{ (commutazione bosonica):} \quad (411)$$

$$\langle a_s^\dagger a_s \rangle = \langle S | (a_1^\dagger a_1) | S \rangle = \sum_{m,n} \sqrt{P_m P_n} \langle m|_2 \langle m|_1 a_1^\dagger a_1 | n \rangle_1 | n \rangle_2 = \sum_n P_n n = N_s \text{ (momento del primo ordine),} \quad (412)$$

$$\begin{aligned} \langle a_s a_s^\dagger \rangle &= \langle S | (1 + a_1^\dagger a_1) | S \rangle = \sum_{m,n} \sqrt{P_m P_n} \langle m|_2 \langle m|_1 (1 + a_1^\dagger a_1) | n \rangle_1 | n \rangle_2 = \\ &= \sum_n P_n n + \sum_n P_n = N_s + 1, \text{ ove } \sum_n P_n = 1, \text{ per definizione di ampiezza di probabilità,} \end{aligned} \quad (413)$$

$$\langle a_I^\dagger a_I \rangle = \langle S | (a_2^\dagger a_2) | S \rangle = N_s, \quad (414)$$

$$\langle a_I a_I^\dagger \rangle = \langle S | (1 + a_2^\dagger a_2) | S \rangle = N_s + 1, \quad (415)$$

in tale caso si sfrutta il fatto che uno stato squeezed entangled offre lo stesso numero di fotoni su entrambi i modi (signal e idler).

I summenzionati elementi rappresentano gli elementi della diagonale principale della matrice, connessi esclusivamente al numero medio di fotoni dello stato.

Si procede con il calcolo degli altri elementi della matrice di covarianza non appartenenti alla diagonale principale:

$$\langle a_s^{\dagger 2} \rangle = \sum_{m,n} \sqrt{P_m P_n} \langle m|_2 \langle m|_1 a_1^\dagger a_1^\dagger | n \rangle_1 | n \rangle_2 = 0, \quad (416)$$

$$\langle a_I^{\dagger 2} \rangle = \langle a_s^2 \rangle = \langle a_I^2 \rangle = 0, \quad (417)$$

$$\begin{aligned} \langle a_s a_I \rangle &= \sum_{m,n} \sqrt{P_m P_n} \langle m|_2 \langle m|_1 a_1 a_2 | n \rangle_1 | n \rangle_2 = \\ &= \sum_{m,n} \sqrt{P_m P_n} \langle m|_2 \langle m|_1 \sqrt{n} \sqrt{n} | n-1 \rangle_1 | n-1 \rangle_2 = \sum_n \sqrt{P_{n-1} P_n} n, \text{ per } m = n-1. \end{aligned} \quad (418)$$

Sviluppando:

$$P_{n-1} = \frac{(1-U)U^{n-1}U}{U} = \frac{P_n}{U}, \quad (419)$$

ovvero

$$\langle a_s a_I \rangle = \sum_n \frac{P_n}{\sqrt{U}} n = \sqrt{N_s(N_s + 1)}, \quad (420)$$

$$\langle a_I a_s \rangle = \sqrt{N_s(N_s + 1)}, \quad (421)$$

$$\langle a_s^\dagger a_I^\dagger \rangle = \sum_{m,n} \sqrt{P_m P_n} \langle m|_2 \langle m|_1 (n+1)|n+1\rangle_1 |n+1\rangle_2, \text{ per } m = n+1, \quad (422)$$

$$= \sum_n \sqrt{P_{n+1} P_n} (n+1), \text{ in cui } P_{n+1} = P_n U, \quad (423)$$

$$\langle a_s^\dagger a_I^\dagger \rangle = \sum_n P_n \sqrt{U} (n+1) = \sqrt{U} (N_s + 1) = \sqrt{N_s(N_s + 1)}, \quad (424)$$

$$\langle a_I^\dagger a_s^\dagger \rangle = \sqrt{N_s(N_s + 1)}. \quad (425)$$

Dai calcoli effettuati, si ricava la seguente matrice di covarianza, corrispondente a quanto riportato in letteratura:

$$C_{quantum} = \begin{pmatrix} N_s + 1 & 0 & \sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 \\ 0 & N_s + 1 & 0 & \sqrt{N_s(N_s + 1)} \\ \sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 & N_s & 0 \\ 0 & \sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 & N_s \end{pmatrix}. \quad (426)$$

In maniera analoga a quanto ricavato per ricavare la matrice di covarianza in funzione degli operatori di creazione/distruzione, si procede a ricavare la matrice di covarianza in termini di operatori di posizione e di momento, poiché:

$$q \propto \frac{a+a^\dagger}{2}, \quad (427)$$

$$p \propto \frac{a-a^\dagger}{2i}. \quad (428)$$

Definendo:

$$C = \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & p_1 & q_2 & p_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} q_1^2 & q_1 p_1 & q_1 q_2 & q_1 p_2 \\ p_1 q_1 & p_1^2 & p_1 q_2 & p_1 p_2 \\ q_2 q_1 & q_2 p_1 & q_2^2 & q_2 p_2 \\ p_2 q_1 & p_2 p_1 & p_2 q_2 & p_2^2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (429)$$

si ricavano i seguenti elementi matriciali.

$$\langle q_1^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle (a_1 + a_1^\dagger)(a_1 + a_1^\dagger) \rangle = \frac{1}{4} (2N_s + 1), \quad (430)$$

$$\langle q_2^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle (a_2 + a_2^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger) \rangle = \frac{1}{4} (2N_s + 1), \quad (431)$$

$$\langle p_1^2 \rangle = -\frac{1}{4} \langle (a_1 - a_1^\dagger)(a_1 - a_1^\dagger) \rangle = \frac{1}{4} (2N_s + 1), \quad (432)$$

$$\langle p_2^2 \rangle = -\frac{1}{4} \langle (a_2 - a_2^\dagger)(a_2 - a_2^\dagger) \rangle = \frac{1}{4} (2N_s + 1), \quad (433)$$

$$\langle q_1 q_2 \rangle = \frac{1}{4} \langle (a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger) \rangle = \frac{1}{4} (2\sqrt{N_s(N_s + 1)}), \quad (434)$$

$$\langle p_1 p_2 \rangle = -\frac{1}{4} \langle (a_1 - a_1^\dagger)(a_2 - a_2^\dagger) \rangle = -\frac{1}{4} (2\sqrt{N_s(N_s + 1)}), \quad (435)$$

$$\langle q_2 q_1 \rangle = \frac{1}{4} \langle (a_2 + a_2^\dagger)(a_1 + a_1^\dagger) \rangle = \frac{1}{4} (2\sqrt{N_s(N_s + 1)}), \quad (436)$$

$$\langle p_2 p_1 \rangle = -\frac{1}{4} \langle (a_2 - a_2^\dagger)(a_1 - a_1^\dagger) \rangle = -\frac{1}{4} (2\sqrt{N_s(N_s + 1)}). \quad (437)$$

$$C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2N_s + 1 & 0 & 2\sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 \\ 0 & 2N_s + 1 & 0 & -2\sqrt{N_s(N_s + 1)} \\ 2\sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 & 2N_s + 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{N_s(N_s + 1)} & 0 & 2N_s + 1 \end{pmatrix}. \quad (438)$$

Come dimostrato, si è ottenuta la matrice di covarianza in termini di operatori momento e posizione relativamente ad uno stato entangled squeezed a due modi.

Si effettuano calcoli analoghi nel caso in cui si generi uno stato coerente (caso classico) rispetto ad uno stato entangled (caso quantistico), al fine di confrontare matematicamente gli elementi di correlazione nel caso di una misurazione congiunta nella sezione ricevente del radar, ponendosi nella casistica classica migliore.

$$a_c = a - \alpha \quad (439)$$

$$a_c^\dagger = a - \alpha^* \quad (440)$$

Si procede matematicamente in maniera analoga a quanto fatto precedentemente nel caso quantistico.

$$Co = \sum_n \sqrt{P_n} |n\rangle_1 |n\rangle_2, \quad (441)$$

$$\text{con } P_n = \frac{e^{-N_s} N_s^n}{n!} \text{ (distribuzione di probabilità Poussoniana),} \quad (442)$$

$$\langle a_j^\dagger a_j \rangle = N_s, \quad (443)$$

$$\langle a_j a_j^\dagger \rangle = N_s + 1, \quad (444)$$

$$\langle a_j a_t \rangle = \langle a_t a_j \rangle = \langle a_j^\dagger a_t^\dagger \rangle = \langle a_t^\dagger a_j^\dagger \rangle = \sum_n \sqrt{\frac{n}{N_s}} P_n n = N_s. \quad (445)$$

Al fine della comparazione, si è assunto che gli stati abbiano il medesimo numero medio di fotoni N_s , corrispondente a considerare un'invarianza sull'energia degli stati da confrontare.

$$C_{classic} = \begin{pmatrix} N_s + 1 & 0 & N_s & 0 \\ 0 & N_s + 1 & 0 & N_s \\ N_s & 0 & N_s & 0 \\ 0 & N_s & 0 & N_s \end{pmatrix}. \quad (446)$$

Come si evince dal calcolo delle matrici di correlazioni si nota che dal caso quantistico a quello classico, gli elementi sulla diagonale principale sono gli stessi (a parità di numero medio di fotoni), mentre la variazione si ottiene sugli elementi anti-diagonali. Questi ultimi comprendono il grado di correlazione in uno stato coerente e in uno stato squeezed entangled, a differenza degli elementi della diagonale principale che sintetizzano esclusivamente l'informazione connessa al numero di fotoni trasmessi. I termini di correlazione trovati sono i seguenti:

$$stato \text{ squeezed entangled } = \sqrt{N_s(N_s + 1)} = C_q \quad (447)$$

$$stato \text{ coerente } = N_s = C_c, \quad (448)$$

pertanto, analizzando le suddetti funzioni è possibile comprendere matematicamente in che misura si ottiene il vantaggio quantistico rispetto al caso classico, in funzione del numero medio di fotoni. Tramite uno script in Matlab, è stato possibile descrivere le funzioni di correlazione in funzione del numero medio di fotoni e il differenziale tra le stesse.

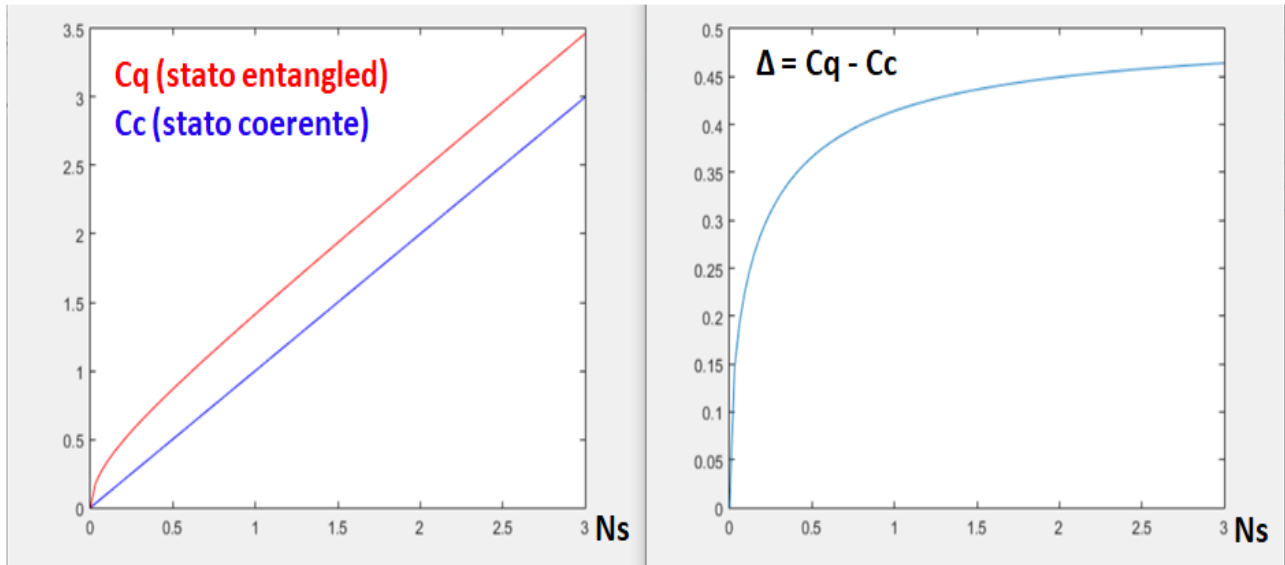


Figura 41: Funzioni di correlazione di uno stato entangled e di uno stato coerente in funzione del numero medio di fotoni. Differenziale tra le funzioni di correlazione del caso quantistico e classico in funzione del numero medio di fotoni.

La funzione di correlazione dello stato entangled è sempre maggiore rispetto a quella di uno stato coerente, evidenziando che nella fase iniziale, ovvero per valori molto piccoli del valore medio del numero di fotoni, lo scostamento è molto maggiore, per poi tendere asintoticamente ad un valore doppio per valori di $N_s \gg 1$. Per tale motivazione si suole sfruttare il vantaggio quantistico nel regime di bassa intensità di trasmissione, con numero molto basso di fotoni medi, in quanto il differenziale rispetto al caso classico offre un margine significativamente più esteso. Per valori molto grandi di N_s , si assiste comunque ad un vantaggio in termini di elementi di correlazione, con un valore che tende asintoticamente a 0.5. La dimostrazione matematica di ciò è semplicemente data dalla risoluzione del seguente limite, utilizzando il teorema di De L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x(x+1)} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2} \quad (449)$$

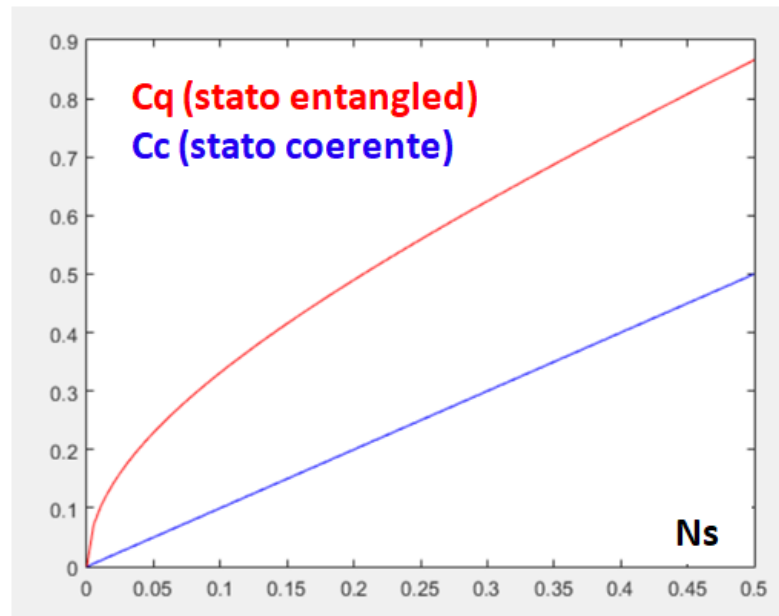


Figura 42: Particolare delle funzioni di correlazione dello stato entangled e dello stato coerente per un numero medio di fotoni basso in cui si evince uno scostamento crescente tra le funzioni di correlazione verso un numero medio di fotoni tendenti al valore nullo.

Quanto ricavato dai calcoli precedenti esprime il livello di correlazione dei fotoni di uno stato entangled e coerente. Per una maggiore visualizzazione delle risultanze ottenute, tramite uno script Matlab è stato possibile creare un grafico tridimensionale delle matrici di covarianza (in funzione degli operatori di creazione/annichilazione) per evidenziare che le differenze, a parità di energia emessa (numero medio di fotoni generati), risiedono esclusivamente sugli elementi anti-diagonale di correlazione.

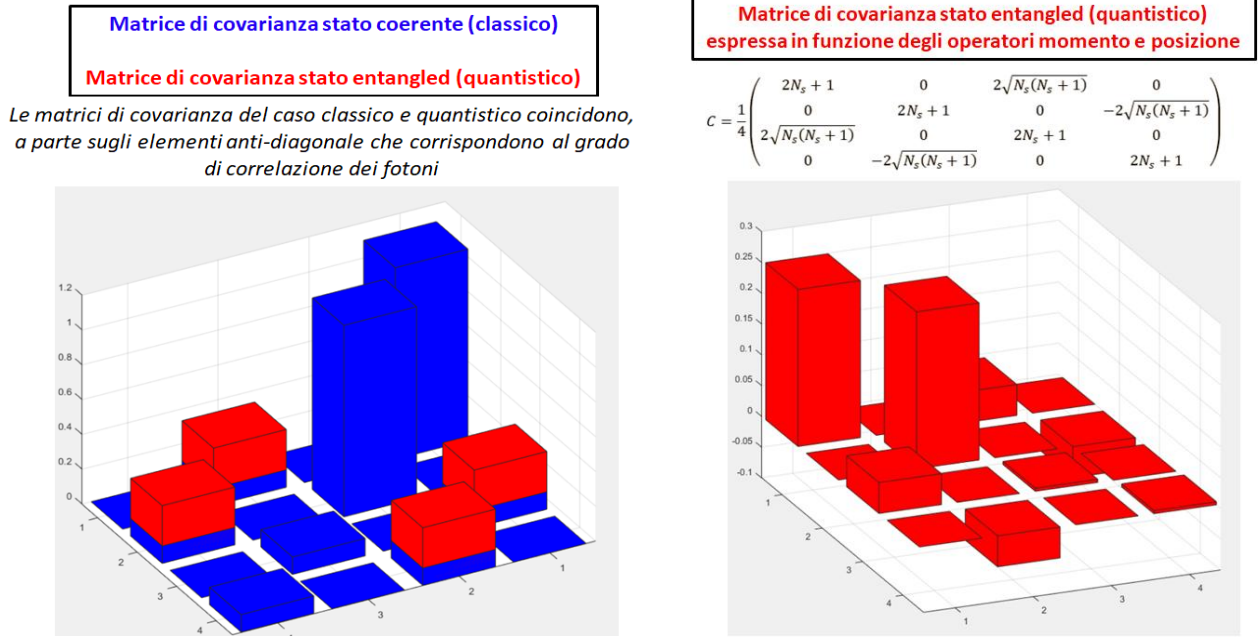


Figura 43: (a) Grafico 3D delle matrici di covarianza rappresentate sia per il caso classico (blu) sia per quello quantistico (rosso). (b) Grafico 3D della matrice di covarianza espressa in funzione degli operatori momento e posizione, relativamente ad uno stato entangled squeezed a due modi.

Inoltre, il grafico tridimensionale delle matrici di covarianza è stato ricavato per valori decrescenti di N_s , in cui è possibile confermare che il margine, in termini di vantaggi prestazionali di un radar quantistico, diventa maggiormente significativo nella condizione di basso numero medio di fotoni.

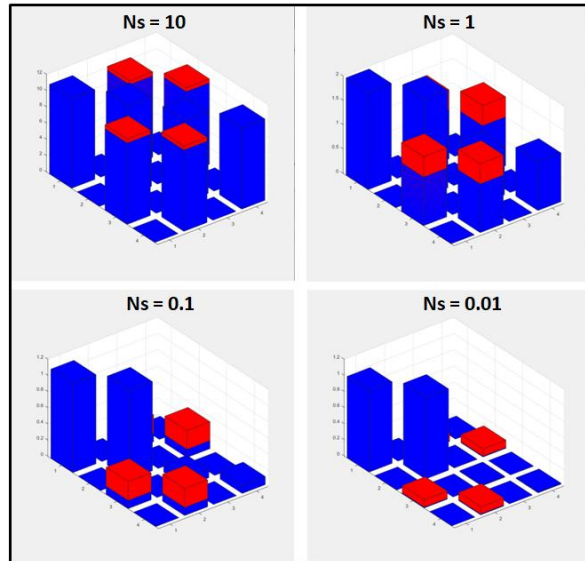


Figura 44: Grafici 3D delle matrici di covarianza rappresentate sia per il caso classico (blu) sia per quello quantistico (rosso) e calcolate per differenti valori del numero medio di fotoni. Tali grafici denotano che il vantaggio prestazionale, in termini di margine sugli elementi di correlazione, risulta maggiore, in senso relativo, al decrescere del numero medio di fotoni.

In termini relativi, la matrice di covarianza di uno stato entangled presenta valori maggiori sugli elementi di correlazione, al decrescere di N_s (istogrammi rossi).

Considerando anche l'effetto del rumore, esso si può descrivere matematicamente con i relativi operatori di creazione/distruzione, caratterizzato dalle seguenti statistiche:

$$\langle a_B \rangle^2 = 0 \quad (450)$$

$$\langle a_B \rangle^2 = 0 \quad (451)$$

$$\langle a_B^\dagger a_B \rangle = N_B \quad (452)$$

$$\langle a_B a_B^\dagger \rangle = N_B + 1, \quad (453)$$

fornendo la seguente matrice di covarianza in ipotesi di target assente e di esclusivo rilevamento di rumore (nel caso tale matrice sia calcolata in combinazione al fotone idler memorizzato – ipotesi target assente):

$$C_{noise} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2^\dagger \\ a_1^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^\dagger & a_2^\dagger & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} N_B + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_S + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_B \end{pmatrix}. \quad (454)$$

In linea teorica, la matrice di covarianza ricavata, per quanto riguarda l'ipotesi di target assente e di ricezione esclusivo del rumore, non presenta elementi diversi da zero al di fuori della diagonale principale, ovvero è priva di fattori di correlazione.

Lo stato entangled squeezed a due modi trasmesso dal quantum radar, dopo essere stato propagato in aria, viene riflesso verso il ricevitore, ottenendo la seguente espressione matematica (espressione in funzione della riflettività del target – ipotesi di target presente):

$$a_R = \sqrt{\kappa} a_S + \sqrt{(1 - \kappa)} a_B \quad (455)$$

$$a_R^\dagger = \sqrt{\kappa} a_S^\dagger + \sqrt{(1 - \kappa)} a_B^\dagger \quad (456)$$

$$\langle a_R^\dagger a_R \rangle = \kappa N_S + (1 - \kappa) N_B = \kappa (N_S - N_B) + N_B \quad (457)$$

$$\langle a_R a_R^\dagger \rangle = \kappa (N_S + 1) + (1 - \kappa) (N_B + 1) = \kappa (N_S - N_B) + N_B + 1 \quad (458)$$

$$\langle a_R a_I \rangle = \langle a_I a_R \rangle = \langle a_R^\dagger a_I^\dagger \rangle = \langle a_I^\dagger a_R^\dagger \rangle = \sqrt{\kappa N_S (N_S + 1)}. \quad (459)$$

Effettuando i calcoli sui termini della matrice di covarianza degli operatori di creazione e distruzione per lo stato ricevuto, espresso come somma dei contributi dello stato entangled e del

rumore di fondo, si ricava che gli elementi di correlazione vengono scalati di un fattore $\sqrt{k}$. Questa osservazione, pur non variando l'andamento delle curve di correlazione sia del caso quantistico che classico, assume una valenza fondamentale in termini di energia minima rilevabile dai detector, in quanto fornisce un fattore di scala alla misurazione congiunta da effettuare nel ricevitore del radar (con $k \ll 1$).

In conclusione, si potrebbe scrivere matematicamente il contributo del rumore, contestualmente al rilevamento di uno stato entangled, isolando una matrice con soli elementi di correlazione, ad esempio nel caso di uno stato di Bell (stato massimamente misto), ed una matrice con soli elementi connessi al numero medio di fotoni (rumore). Tali matrici si combinano tramite l'assegnazione di un peso, che si definirà con la variabile “ t ”, che esprime il contributo complessivo degli effetti presenti in un sistema con stato entangled e con rumore:

$$t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (460)$$

In generale, quando si considerano i contributi connessi al funzionamento di un dispositivo reale e le non idealità dei componenti impiegati, in aggiunta alla presenza di un forte contributo di rumore, come per esempio un segnale di disturbo o semplicemente, secondo le assunzioni sinora ipotizzate in cui $N_B \gg N_S$, allora risulta che $t \ll 1$. In tale condizione, gli elementi anti-diagonali della matrice di rumore assumeranno un contributo non nullo e pertanto comparabile a quelli presenti nella matrice entangled descriventi la correlazione tra i fotoni. In generale, il rumore immesso nel sistema, sebbene teoricamente ed idealmente non correlato, presenta un contributo di disturbo negli elementi di correlazione entangled, causando un decremento prestazionale del radar ed una successiva riduzione della probabilità di detection.

Significato della matrici di covarianza nelle misurazioni

Le matrici di covarianza esprimono matematicamente il livello di correlazione dei fotoni, relativamente a stati differenti, come per esempio quanto riportato precedente nell'analisi comparativa tra l'approccio classico e quantistico. Il termine di correlazione corrisponde all'elemento matriciale $\langle a_1 a_2 \rangle$, il quale, è associato ad un conteggio in coincidenza dei detector posti nella sezione ricevente, al fine di correlare statisticamente il fotone signal riflesso e quello idler memorizzato. Come descritto nei capitoli precedenti, l'operatore di distruzione corrisponde, in termini di osservabile, all'assorbimento di un fotone e successiva emissione di un elettrone ($a\sigma_+$ -

fattore di scala). Nel caso dell'elemento di correlazione $\langle a_1 a_2 \rangle$, esso descrive una misurazione congiunta effettuata dai due detector della sezione ricevente, i quali assorbiranno rispettivamente il fotone signal riflesso e quello idler memorizzato, trasducendolo in segnale elettrico ed andando ad effettuare successivamente una coincidenza tra i conteggi ottenuti nei singoli detector. Il conteggio in coincidenza può essere modellato in maniera semplice con l'impiego di una logica AND tra le rispettive uscite dei rilevatori.

Foglio di calcolo radar quantistico

Per mettere a sistema quanto studiato in questa tesi, si è generato un foglio di calcolo contenente informazioni concernenti il dimensionamento parametrico di un dispositivo radar quantistico reale. Le variabili definite sono di seguito riportate, in cui sono stati inseriti alcuni valori per fissare talune ipotesi del sistema, al fine di ottenere i risultati prestazionali del dispositivo:

$$F = 10 \text{ GHz (frequenza di generazione dei fotoni – signal)} \quad (461)$$

$$W = 100 \text{ MHz (banda di phase matching)} \quad (462)$$

$$M = 10^6 \text{ (numero di coppie entangled generate)} \quad (463)$$

$$T = \frac{M}{W[\text{Hz}]} = 10 \text{ ms (tempo di impulso)} \quad (464)$$

$$L = \frac{PRI[s]}{T[s]} = 2 \text{ (rapporto tra intervallo di ripetizione dell'impulso e lunghezza dell'impulso)} \quad (465)$$

$$PRI = L * T[s] = 20 \text{ ms (intervallo di ripetizione dell'impulso)} \quad (466)$$

$$R_{min} = R_{cell_T} = T[s] * \frac{c[\frac{m}{s}]}{2} = 1500 \text{ km (range di non ambiguità minima e radar resolution cell)} \quad (467)$$

$$R_{max} = PRI[s] * \frac{c[\frac{m}{s}]}{2} = 3000 \text{ km (range massimo del radar)} \quad (468)$$

$$P_{single} = 30 + 10 * \text{Log}(h[J * s] * F[\text{Hz}]) \approx -202 \frac{\text{dBm}}{s} \text{ (potenza associata ad un singolo fotone alla frequenza di funzionamento)} \quad (469)$$

$$P_{M,T} = 30 + 10 * \text{Log}\left(h[J * s] * F[\text{Hz}] * \frac{M}{T[s]}\right) \approx -122 \text{ dBm (potenza associata a } M \text{ singoli fotoni nell'impulso } T) \quad (470)$$

$$P_{M_av_PRI} = 30 + 10 * \text{Log} \left(h[J * s] * F[\text{Hz}] * \frac{M}{T[s]*L} \right) \approx$$

-125 dBm (potenza associata a M singoli fotoni mediata sul PRI) (471)

$$R = 4 \text{ m} \text{ (distanza di rilevamento del target)} \quad (472)$$

$$Att_{aria} \approx -0.02 \frac{dB}{km} \text{ (valore di attenuazione dell'aria alla frequenza } F) \quad (473)$$

$$Gain_{antenna} = 35 \text{ dBi} \text{ (guadagno dell'antenna alla frequenza } F) \quad (474)$$

$$Att_{Friis} = 20 * \text{Log} \left(\frac{c \left[\frac{m}{s} \right]}{F[\text{Hz}] * 4\pi * 2R[m]} \right)$$

$\approx -70.5 \text{ dB}$ (attenuazione di Friis alla distanza $2R$, ipotizzando un coefficiente di attenuazione ideale) (475)

$$Att_{Friisgain} = Att_{Friis}[dB] + 2 * Gain_{antenna}[dBi] \approx$$

-0.5 dB (valore di attenuazione al netto dei guadagni in ricezione e trasmissione) (476)

$$Att_{aria_{tot}} = Att_{aria}[dB] * 2R[km] =$$

-0.00016 dB (valore di attenuazione dell'aria alla distanza $2R$) (477)

$$Att_{tot} = Att_{Friisgain}[dB] + Att_{aria_{tot}}[dB] \approx -0.5 \text{ dB} \text{ (valore di attenuazione totale)} \quad (478)$$

$$N_s = 0.01 \text{ (numero medio di fotoni generati)} \quad (479)$$

$$k = 0.01 \text{ (riflettività del target)} \quad (480)$$

$$P_{RX_M_av_PRI} = P_{M_av_PRI}[dBm] + Att_{tot}[dB] \approx$$

-125.3 dB (potenza ricevuta associata a M singoli fotoni mediata sul PRI) (481)

$$P_{M_T_Ns} = 30 + 10 * \text{Log} \left(h[J * s] * F[\text{Hz}] * \frac{M}{T[s]} * N_s \right)$$

$\approx -142 \text{ dBm}$ (potenza associata a M singoli fotoni relativamente al numero medio di fotoni nell'impulso T) (482)

$$P_{M_av_PRI_Ns} = 30 + 10 * \text{Log} \left(h[J * s] * F[\text{Hz}] * \frac{M}{T[s] * L} * N_s \right)$$

$\approx -144.8 \text{ dBm}$ (potenza associata a M singoli fotoni relativamente al numero medio di fotoni mediata sul PRI) (483)

$$P_{RX_{M_{avPRI_{Ns}}}} = P_{M_{avPRI_{Ns}}} [dBm] + Att_{tot} [dB]$$

$$\approx -145.3 \text{ dBm (potenza ricevuta associata a } M \text{ singoli fotoni relativamente al numero medio di fotoni mediata sul PRI)}$$
(484)

$$P_{M_{avPRI_{kNs}}} = 30 + 10 * \text{Log} \left(h[J * s] * F[Hz] * \frac{M}{T[s] * L} * k * N_s \right)$$

$$\approx -164.8 \text{ dBm (potenza associata a } M \text{ singoli fotoni relativamente al numero medio di fotoni riflessi mediata sul PRI)}$$
(485)

$$P_{RX_{M_{avPRI_{kNs}}}} = P_{M_{avPRI_{kNs}}} [dBm] + Att_{tot} [dB]$$

$$\approx -165.3 \text{ dBm (potenza ricevuta associata a } M \text{ singoli fotoni relativamente al numero medio di fotoni riflessi mediata sul PRI)}$$
(486)

$$Temp = 0.007 \text{ K (temperatura del ricevitore)}$$
(487)

$$NF = 1.5 \text{ dB (figura di rumore del ricevitore)}$$
(488)

$$BW = 25 \text{ Hz (banda di ricezione)}$$
(489)

$$Noise_{photon} = 600 \frac{\text{fotoni}}{\text{Hz}} \text{ (numero medio di fotoni di rumore alla frequenza } F)$$
(490)

$$Noise_{floor} = 10 * \text{Log} \left(1.38 * 10^{-23} \left[\frac{J}{K} \right] * T[K] * 1000 \right) + NF[dB] + 10 * \text{Log}(BW[Hz]) \approx$$

$$-204.67 \text{ dBm (minimo livello di rumore rilevabile dal ricevitore)}$$
(491)

$$P_{noise_{photon}} = 30 + 10 * \text{Log}(h[J * s] * F[Hz] * Noise_{photon})$$

$$\approx -174 \text{ dBm (potenza associata al numero medio di fotoni di rumore alla frequenza } F)$$
(492)

$$P_{noise_{photon_BW}} = 30 + 10 * \text{Log}(h[J * s] * F[Hz] * Noise_{photon} * BW[Hz])$$

$$\approx -160 \text{ dBm (potenza associata al numero medio di fotoni di rumore alla frequenza } F \text{ relativamente alla banda di ricezione)}$$
(493)

$$SNR_{radar} = P_{RX_{M_{avPRI_{kNs}}}} [dBm] - P_{noise_{photon_BW}} [dBm] \approx$$

$$-5.3 \text{ dB (rapporto segnale rumore del radar quantistico)}$$
(494)

Dal calcolo si evince che ad una distanza di 4 m dal target, supponendo:

- il ricevitore in una temperatura criogenica (7 mK);
- una banda di ricezione molto stretta (25 Hz);

- un'antenna con un guadagno molto elevato lungo (35 dBi) alla frequenza di lavoro (il guadagno dell'antenna è stato scelto per compensare l'attenuazione fornita dal mezzo di propagazione);
- un target a bassa riflettività ($k = 0.01$), un basso numero di fotoni ($N_s = 0.01$) ed un elevato numero medio di fotoni per modo ($N_b = 600/\text{Hz}$);
- PRI pari al doppio della lunghezza dell'impulso (tale ipotesi fornisce potenzialmente un'unica cella radar di risoluzione, anche se i valori ottenuti sono talmente elevati rispetto alla distanza effettiva del dispositivo quantistico, che tale ipotesi non è contestualizzabile alla conoscenza a priori della distanza del target),

si ottiene un $\text{SNR} = -5 \text{ dB}$, il quale rappresenta la soglia che si è imposta per comprendere le prestazioni del radar quantistico. Dalla relazione tra SNR e la probabilità di rilevamento P_d , si evince che ad un SNR di circa -5 dB si ottiene, nel caso quantistico, una P_d pari a 0.5 (50 %), considerando una $P_f = 0.01$, rispetto al caso classico che presenta, a parità di SNR, una P_d pari a circa 0.075 (7.5 %).

Le assunzioni fatte sono prevalentemente relative al dimensionamento della sezione ricevente tale da ottenere il valore SNR posto come soglia (-5 dB), non modificando, pertanto, i parametri relativi alla riflettività del target, al numero medio di fotoni generati, all'efficienza di conversione delle coppie di stati entangled.

	MHz			m	km			K	
W	100		Res_cell_PW	1500000	1500		Temp	0,007	
	#			m	km			dB	
M	1000000		R_max_PRI	3000000	3000		NF	1,5	
	ms			m	km			MHz	Hz
T	10		R	4	0,004		BW	0,000025	25
	GHz			db/km				dBm	
F	10		Att_aria	-0,02			Noise_floor	-204,67083	
	dBm			dB				#/Hz	
P_single	-201,7875		Att_friis	-70,5036			Noise_photon	600	
	dBm			dBi				dBm	
P_M_T	-121,7875		Gain	35			P_Noise_photon	-174,00597	
	//			dB				dBm	
PRI/T	2		Att_friis_gain	-0,50357			P_Noise_photon_BW	-160,02657	
	ms			dB				dBm	
PRI	20		Att_aria_tot	-0,00016			PRX_M_av_PRI_kNs	-165,30152	
	dBm			dB				dBm	
P_M_av_PRI	-124,7978		Att_tot	-0,50373			PRX_M_av_PRI_kNs	-165,30152	OK
	dBm							dB	
PRX_M_av_PRI	-125,3015						SNR_radar_kNs	-5,2749445	
	#			dB					
Ns	0,01		SNR_dB	-1,54902					
	dBm			//		//			
P_M_T_Ns	-141,7875		SNR	0,7	Pd	0,6			
				0,35		0,5			
P_M_av_PRI_Ns	-144,7978		SNR_dB	-4,55932					
	dBm			dB					
PRX_M_av_PRI_Ns	-145,3015		SNR_radar_Ns	14,72506					
	#								
k	0,01								
	dBm								
P_M_av_PRI_kNs	-164,7978								
	dBm			dB					
PRX_M_av_PRI_kNs	-165,3015		SNR_radar_kNs	-5,27494					

Figura 45: Schermata del foglio di calcolo realizzato per la determinazione dei parametri principali di un dispositivo radar quantistico.

I calcoli effettuati dimostrano che l'implementazione pratica di un radar quantistico è fortemente limitata ad applicazioni con distanze molto basse, quali possono essere ad esempio le applicazioni in ambito medico. Ciò è stato dimostrato configurando taluni parametri di componenti reali, seppur effettuando diverse semplificazioni, che sottolineano le attuali limitazioni tecnologiche insite nella costruzione di un dispositivo radar quantistico in grado di concretizzare i vantaggi prestazionali alla base dell'illuminazione quantistica. Oltre alle applicazioni medicali, un dispositivo radar quantistico potrebbe essere impiegato nel rilevamento di oggetti sepolti a pochi centimetri, rappresentanti ordigni esplosivi da identificare per la bonifica del campo di battaglia, anche se si dovrebbe quantificare il coefficiente di penetrazione dei fotoni entangled all'interno del suolo.

Conclusioni

Il radar quantistico, in senso lato, si riferisce a diversi protocolli e prototipi che, in teoria o in una fase sperimentale preliminare, mirano a sfruttare l'entanglement quantistico e le proprietà di correlazioni quantistiche per il miglioramento della sensibilità di rilevamento del bersaglio. Sebbene il radar quantistico rappresenta un'area di ricerca promettente, la realizzazione di un prototipo di radar quantistico realistico e funzionale non è qualcosa di immediato. Di fatto, sussiste un evidente ed ampio divario tra le primarie aspettative teoriche ed una successiva comprensione dei risultati sperimentali, che potrebbe condurre ad una sorta di scetticismo sui reali vantaggi prestazionali di un radar quantistico rispetto ad un radar convenzionale, impiegato in situazioni pratiche. Bisogna innanzitutto focalizzarsi sui concetti insiti nell'illuminazione quantistica, poiché tale tecnica ha sollevato aspettative molto alte sulle sue possibili applicazioni nei radar a lungo raggio, aspettative che gradualmente sono state degradate da problematiche pratiche e sperimentali. In effetti, è notevole che in nella letteratura scientifica, non vi è alcun riferimento a un vero e proprio radar quantistico o ad un progetto prototipale che si possa avvicinare ad un dispositivo a lungo raggio basato sull'illuminazione quantistica.

Nonostante questa assunzione iniziale, bisogna rimarcare che i potenziali vantaggi offerti da una tecnologia basata su radar quantistico rispetto alle tecnologie radar convenzionali costituiscono ancora una motivazione sufficiente per comprendere meglio il concetto, implicando la scoperta di applicazioni realistiche.

Gli esperimenti dimostrano che il radar quantistico offre un miglioramento rispetto all'illuminazione classica ed inoltre si evince che solo se si effettuano dei confronti con le prestazioni di sensibilità di un'illuminazione a luce coerente che tali vantaggi si riducono drasticamente o si annullano del tutto. Tuttavia, è anche vero che questi esperimenti funzionano in ipotesi e condizioni molto diverse da quelle che coinvolgono ad esempio i radar a lungo raggio. Gli esperimenti in letteratura sembrano suggerire che non esiste un radar quantistico universale, ma il messaggio fondamentale è che l'illuminazione quantistica potrebbe essere potenzialmente utile esclusivamente per specifiche applicazioni: quelli in cui l'uso della luce coerente è precluso per diversi motivi.

Sono stati anche evidenziati diversificate problematiche connesse alla realizzazione di un vero e proprio radar quantistico:

- Il problema legato alla conoscenza a priori della distanza del target. Tale problema è alla base del protocollo di un radar quantistico.
- Perdita di intensità nel fascio del segnale a causa di processi di attenuazione e basso prodotto banda-tempo. Soprattutto nello spettro delle microonde si ottiene che la potenza utilizzata per rilevare un oggetto non è sufficiente, poiché il vantaggio quantistico si palesa nella condizione tale

per cui $N_s \ll 1$. A ciò deve essere anche correlato il problema che nella banda delle microonde, impiegata per applicazioni a lungo raggio, a differenza delle frequenze ottiche è molto complesso raggiungere un elevato prodotto banda-tempo. Quest'ultimo è un ulteriore parametro fondamentale per sfruttare i vantaggi teorici del protocollo di illuminazione quantistica.

- Memorizzazione del fotone idler. Per effettuare misure congiunte o in generale, per correlare il signal ricevuto con l'idler, le informazioni fornite dal fotone idler devono essere preservate. Tale processo potrebbe essere condotto con l'impiego di memorie quantistiche (molto costose) o con l'utilizzo di un protocollo di illuminazione quantistica ibrida, basata su metodologie digitali classiche e su approcci con matched filtering. Questa problematica attualmente è fonte di riduzione della distanza massima di un radar quantistico, oltre che ad un decremento prestazionale in termini di SNR.
- Generazione di fasci entangled. La procedura più comune per la generazione di entanglement quantistico è SPDC. Sebbene questa sia una procedura abbastanza utile per le frequenze ottiche, nascono delle problematiche nella gamma delle frequenze delle microonde. Metodi diretti per la generazione di fotoni a microonde entangled come il JPA vanno implementati in condizioni criogeniche, mentre la conversione frequenziale è attualmente altamente poco efficiente.
- Il problema del fading del bersaglio. Esso si verifica quando non si ha piena conoscenza della riflettività del bersaglio e della fase, ed è un altro problema che influenza l'illuminazione quantistica, specialmente nel regime ottico.
- Rilevamento. Per l'illuminazione quantistica, esiste un rivelatore ideale, con un guadagno massimo potenziale pari a 6 dB, ovvero il rivelatore FF-SFG. Ma le attuali limitazioni tecnologiche e le inefficienze reali riducono drasticamente il vantaggio teorico potenziale di 6 dB. La rilevazione fotonica diretta viene utilizzata in diversi esperimenti, sebbene la velocità di conteggio dei fotoni limita in modo significativo il raggio di rilevamento.

I punti summenzionati impediscono la realizzazione di un radar quantistico definitivo ed universale. Tuttavia, i protocolli quantistici possono potenzialmente avere dei vantaggi rispetto ai protocolli di illuminazione classica e funzionare in applicazioni specifiche, specialmente in ambiente rumoroso, nelle applicazioni non invasive e nel rilevamento di bersagli spaziali.

La tesi ha condotto un'analisi partendo dalle principali sperimentazioni concernenti l'illuminazione quantistica nel regime ottico e delle microonde, al fine di redigere talune considerazioni nel settore della Guerra Elettronica in relazione all'impiego di un radar quantistico in operazioni militari. La costruzione pratica di un dispositivo reale radar quantistico necessita di molteplici sfide tecnologiche sia da un punto di vista di dimensionamento dei dispositivi sia per quanto riguarda la reale applicabilità di tale sistema. Pertanto, è stato generato un foglio di calcolo in cui è possibile, a

seguito dell'inserimento di variabili di ingresso, ottenere i risultati prestazioni in uscita, ad esempio in termini di distanza del radar. Tale foglio di calcolo tiene conto di variabili connesse alla generazione dello stato entangled, alla propagazione, allo scenario elettromagnetico ed alla sezione ricevente. A fronte di semplificazioni nei componenti circuitali della sezione ricevente e di particolari condizioni operative dell'apparato, si ottiene una distanza di circa 4 m, per l'ottenimento di un SNR di -5 dB, corrispondente ad una probabilità di rilevazione del 50 %. Tali assunzioni sono state effettuate per comprendere la reale dinamica dei fotoni entangled impiegati come sorgente di un radar quantistico per l'interrogazione di una specifica porzione dello spazio. Questi calcoli avvalorano l'applicabilità di un potenziale radar quantistico per distanze molto limitate e dimostrano un significativo scostamento nell'attuale realizzazione di un dispositivo per l'individuazione di target stealth, ad esempio in operazioni militari. A tal proposito ulteriori studi ed approfondimenti devono essere condotti per la costruzione di un radar quantistico per impiego tattico, operativo e strategico.

In conclusione, le discussioni di cui sopra mostrano le diversificate problematiche per realizzare un radar quantistico reale. Sebbene tali difficoltà nell'attuazione pratica possono essere viste come un'opportunità per incrementare la ricerca finalizzata ad applicare e sviluppare la tecnologia quantistica sul campo. Inoltre la generazione di campi entangled e le difficoltà nel rilevamento del segnale riflesso costituiscono aree di ricerca che richiedono progressi e nuovi sviluppi per soddisfare le specifiche richieste da un radar quantistico, evidenziando che lo sviluppo del radar quantistico richiede una forte sinergia con sviluppi tecnologici quantistici paralleli.

Il lavoro di tesi presentato ha condotto uno studio analitico sulla tecnologia del radar quantistico, partendo dai principali fondamenti teorici della meccanica quantistica per introdurre lo strumento matematico alle argomentazioni successive. L'illuminazione quantistica è stata trattata a fondo per comprendere i peculiari parametri coinvolti ed affrontare una primaria caratterizzazione comparativa della tecnologia classica e quantistica. L'adattabilità al dominio delle microonde ha consentito di esplicitare le principali limitazioni connesse alla fattibilità di un apparato radar quantistico. Il radar quantistico, in ambito militare, consentirebbe di ridimensionare taluni dati parametrici dei sistemi di Guerra Elettronica, anche se sono stati effettuati i calcoli matematici per comprenderne le reali condizioni di applicazioni. Ciò ha dimostrato che il dispositivo presenta un ridotto range di funzionamento, evidenziando ulteriori potenziali applicazioni in campo medico, per applicazioni a basso impatto ed elevata sensibilità.

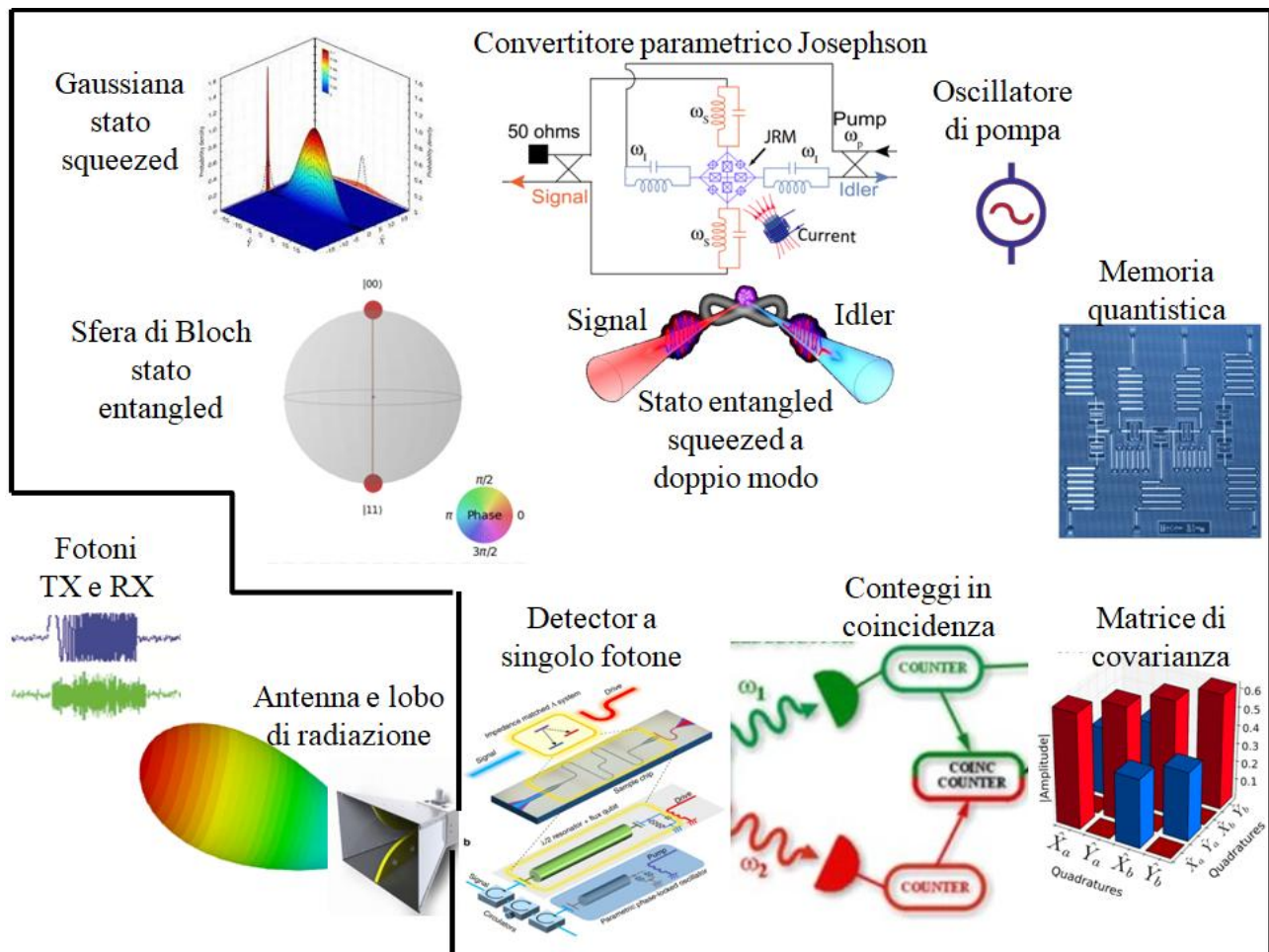


Figura 46: Diagramma principale di un radar quantistico in cui sono evidenziati gli elementi principali ivi trattati per comprenderne il funzionamento e caratterizzare una potenziale applicazione pratica del dispositivo.

La tecnologia di un radar quantistico presenta indubbie potenzialità da un punto di vista strategico, seppur un'implementazione reale con le attuali tecnologie presenta diversificate problematiche tecnico-operative connesse sia all'impiego pratico sia all'ottenimento di un adeguato livello prestazionale. A tal proposito, molteplici argomentazioni devono essere studiate, approfondite e sperimentate per il raggiungimento di un potenziale miglioramento tecnologico finalizzato ad una maggiore versatilità di realizzazione ed utilizzo del radar quantistico in diversificati campi di sviluppo.

Riferimenti

- [1] Zheshen Zhang et al., “*Entanglement-Enhanced Sensing in a Lossy and Noisy Environment*”, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, Massachusetts 02139, USA (Dated: November 24, 2014)
- [2] S. Barzanjeh et al., “*Microwave quantum illumination using a digital receiver*”, Science Advances
- [3] Tanner Crowder and Marco Lanzagorta, “*Detection and Communication with Entanglement*”
- [4] Ricardo Gallego Torromè et al., “*Introduction to Quantum Radar*”
- [5] Giacomo Sorelli et al., “*Detecting a target with quantum entanglement*”, Laboratoire Kastler Brossel, Sorbonne Université, ENS-Université PSL, Collège de France, CNRS; 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France
- [6] Lorenzo Maccone and Changliang Ren, “*Quantum Radar*”, Dip. Fisica and INFN Sez. Pavia, University of Pavia, via Bassi 6, I-27100 Pavia, Italy and Center for Nanofabrication and System Integration, Chongqing Institute of Green and Intelligent Technology, Chinese Academy of Sciences, Chongqing 400714, People’s Republic of China
- [7] David Luong et al., “*Receiver operating characteristics for a prototype quantum two-mode squeezing radar*”
- [8] C.W. Sandbo Chang et al., “*Quantum-Enhanced Noise Radar*”, institute for Quantum Computing and Electrical and Computer Engineering, University of Waterloo, Waterloo, Canada
- [9] Jeffrey H. Shapiro, “*The Quantum Illumination Story*”, Research Laboratory of Electronics Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts 02139, USA
- [10] Matthew Horsley, “*Quantum Sensing and Information Processing*”, Lawrence Livermore National Laboratory